# Exame Nacional de 2017 (1.ª fase)

**Prova Escrita de Matemática A**
12.º Ano de Escolaridade
Prova 635/Versões 1 e 2

**GRUPO I**

| Itens | Versão 1 | Versão 2 |
|---|---|---|
| **1.** | (A) | (D) |
| **2.** | (B) | (D) |
| **3.** | (D) | (B) |
| **4.** | (A) | (C) |
| **5.** | (B) | (C) |
| **6.** | (C) | (A) |
| **7.** | (D) | (B) |
| **8.** | (C) | (A) |

Justificações:

**1.** Se são múltiplos de 5, são da forma xxx5, logo, existem $9^3 \times 1 = 729$.

**2.** Sendo $R$ o acontecimento «O aluno da turma é um rapaz» e $V$ «O aluno tem olhos verdes», sabe-se que:
$P(V \mid R) = \frac{1}{4} \wedge P(R \cap V) = \frac{1}{10}$. Como $P(V \mid R) = \frac{P(V \cap R)}{P(R)}$, tem-se:

$$\frac{P(V \cap R)}{P(R)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow = \frac{\frac{1}{10}}{P(R)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0{,}4 = P(R)$$

$\therefore$ o número de rapazes é $0{,}4 \times 20 = 8$

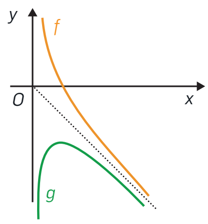
**3.** Atendendo ao gráfico de $f$, conclui-se que $f''(x) < 0$ em $]-\infty, 0]$ e $f''(x) > 0$ em $[0, +\infty[$ .
$\therefore f''(1) + f''(2) > 0,\ f''(-2) + f''(-1) < 0,\ f''(-2) \times f''(-1) > 0$ e $f''(1) \times f''(2) > 0$.

**4.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x) \times g(x)}{x} = \underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}}_{\text{declive da reta de equação } y = -x} \times \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -1 \times (-\infty) = +\infty$

ou

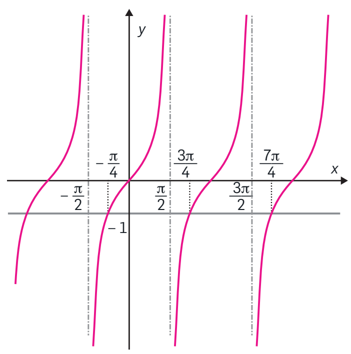
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x) \times g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \times \underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}}_{\text{declive da reta de equação } y = -x} = -\infty \times (-1) = +\infty$

Exemplo de uma representação gráfica das funções $f$ e $g$ e da reta de equação $y = -x$:




**5.** $CD_f = ]-1, +\infty[$, logo $\text{tg}x > -1$, pelo que $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ ou

$x \in \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$ ou $x \in \left]\frac{7\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}\right[$ ou…



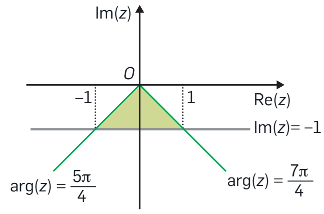

**6.** O declive da reta é $\text{Tg}\alpha$ , ou seja, a equação reduzida é da forma

$y = \text{tg}\alpha x + b$ e, como $\cos\alpha < 0$, vem que $90° < \alpha < 180°$.

$$\therefore \text{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \text{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow \text{tg}^2\alpha = 4 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\cos\alpha < 0} \text{tg}\alpha = -2 \rightarrow y = -2x + b$$

**7.** A região correspondente à condição dada é o triângulo da figura ao lado.

Assim, área = $\frac{2 \times 1}{2} = 1$ (u. a.)




**8.** Termos de $(u_n)$: 1, 2, 3…, 20. $\underbrace{-1}_{u_{21}}, \underbrace{1}_{u_{22}}, \underbrace{-1}_{u_{23}}, \underbrace{1}_{u_{24}},\ldots$

**GRUPO II**

**1.** Sabe-se que $|z_1 - z_2| = \sqrt{5}$

Como $i^{19} = i^{16} \times i^3 = -i$, vem que: $z_1 = \frac{1-3(-i)}{1+i} = \frac{1+3i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i+3i+3}{1^2-i^2} = \frac{4+2i}{2} = 2+i$

$z_2 = -3k\,cis\,\frac{3\pi}{2} = -3k(-i) = 3ki$

$\therefore |z_1 - z_2| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |2+i-3ki| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{\underbrace{2^2+(1-3k)^2}_{>0}} = \underbrace{5}_{>0} \Leftrightarrow 4 + (1-3k)^2 = 5$

$\Leftrightarrow (1-3k)^2 = 1 \Leftrightarrow 1-3k = \pm 1 \Leftrightarrow -3k = 1-1 \vee -3k = -1-1$

$\Leftrightarrow k = 0 \vee k = \frac{2}{3} \underset{k>0}{\Leftrightarrow} k = \boxed{\frac{2}{3}}$

**2.**

**2.1** Como $T(0,0,3)$, tem-se $T'(0,0,-3)$.

**1.º processo:**

Sendo $[TT']$ o diâmetro, o centro da superfície esférica é o ponto médio de $[TT']$, ou seja, $O$, e o raio é 3.

$\therefore$ uma equação de superfície esférica é $(x-0)^2 + (y-0)^2 + (y-0)^2 = 3^2 \Leftrightarrow \boxed{x^2+y^2+z^2=9}$

**2.º processo:**

Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer da superfície esférica. Como $[TT']$ é o diâmetro dessa superfície, tem-se que:

$\overrightarrow{TP} \perp \overrightarrow{T'P}$, isto é:

$\overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{T'P} = 0 \Leftrightarrow (x-0, y-0, z-3) \cdot (x-0, y-0, z+3) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z-3)(z+3) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 3^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x^2+y^2+z^2=9}$

**2.2**

**1.º processo:**

$\overrightarrow{UP} \cdot \overrightarrow{RS} = ||\overrightarrow{UP}|| \times ||\overrightarrow{RS}|| \times \cos(\overrightarrow{UP} \,\hat{}\, \overrightarrow{RS}) = 3 \times 3 \times \underbrace{\cos 180°}_{-1} = \boxed{-9}$

**2.º processo:**

$\overrightarrow{UP} \cdot \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{UP} \cdot (-\overrightarrow{SR}) =$

$= -\overrightarrow{UP} \cdot \overrightarrow{UP} =$

$= -||\overrightarrow{UP}||^2 = -3^2 = \boxed{-9}$

**2.3** Um vetor diretor da reta $TQ$ é $\overrightarrow{TQ}$. Ora, $Q(0,y,0)$ pertence ao plano $PQV$, pelo que $0 + y = 2 \Leftrightarrow y = 2$.

$\overrightarrow{TQ} = Q - T = (0, 2, 0) - (0, 0, 3) = (0, 2, -3)$. Logo, uma condição cartesiana que defina $TQ$ pode ser:

$x = 0 \wedge \frac{y-0}{2} = \frac{z-3}{-3} \Leftrightarrow \boxed{x = 0 \wedge \frac{y}{2} = \frac{3-z}{3}}$

**2.4** Número de casos possíveis: ${}^8C_3$ (ou ${}^8A_3$ se quisermos escolher um vértice de cada vez).

São perpendiculares ao plano $xOy$ os quatro planos que contêm as faces laterais do prisma e os dois que contêm as diagonais das bases, pelo que o número de casos favoráveis é $6 \times {}^4C_3$ ou $6 \times {}^4A_3$.

$\therefore P = \frac{6 \times {}^4C_3}{{}^8C_3} = \frac{6 \times {}^4A_3}{{}^8A_3} = \boxed{\frac{3}{7}}$

**3.** $P(\bar{A} \cup B)$ é a probabilidade de o número da bola retirada ser maior do que 6 ou ser par.

1.º processo:

Existem $n - 6$ bolas com número superior a 6, 3 bolas com número par inferior ou igual a 6 (2, 4 e 6) e $\frac{n-6}{2}$ com número par superior a 6 (já incluídas nas $n - 6$ bolas).

$\therefore P = (\bar{A} \cup B) = \frac{n-6+3}{n} = \boxed{\frac{n-3}{n}}$

2.º processo:

$P = (\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P = (\bar{A} \cap B) = \frac{n-6}{n} + \frac{1}{2} - \frac{\frac{n-6}{2}}{n} = \frac{2n-12}{2n} + \frac{n}{2n} - \frac{n-6}{2n} = \frac{2n-6}{2n} = \boxed{\frac{n-3}{n}}$

3.º processo:

$P = (\bar{A} \cup B) = P\,\overline{(A) + P}\,(B) - P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) + \underbrace{P(A \cap B)}_{\text{n.º} \leq 6 \text{ e par}} = \frac{n-6}{n} + \frac{3}{n} = \boxed{\frac{n-3}{n}}$

4.º processo:

$P(\bar{A} \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cup B) = 1 - \underbrace{P(A \cap \bar{B})}_{\text{n.º} \leq 6 \text{ e ímpar}}$

$= 1 - \frac{3}{n} = \boxed{\frac{n-3}{n}}$

**4.**

**4.1** $f(0) = 9 - 2{,}5(e + e^{-1}) \approx 1{,}28$

$\therefore \sqrt{(f(0))^2 + x^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{1{,}28^2 + x^2} \approx 2 \underset{1{,}28^2 + x^2 \geq 0}{\Leftrightarrow} 1{,}6384 + x^2 \approx 4 \Leftrightarrow x \approx \pm\sqrt{2{,}3616} \underset{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x \approx \boxed{1{,}5}$

Interpretação: na secção representada, o ponto $P$ dista 2 metros do ponto S, da superfície da água do rio, de abcissa aproximadamente 1,5 metros.

**4.2** Vejamos qual é a distância máxima da superfície da água do rio ao arco $PQ$:

$f'(x) = 0 - 2{,}5((1 - 0{,}2x)'e^{1-0{,}2x} + (0{,}2x - 1)'e^{0{,}2x-1}) = -2{,}5(-0{,}2e^{1-0{,}2x} + 0{,}2e^{0{,}2x-1})$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -0{,}2e^{1-0{,}2x} + 0{,}2e^{0{,}2x-1} = 0 \Leftrightarrow \cancel{0{,}2}e^{1-0{,}2x} = \cancel{0{,}2}e^{0{,}2x-1} = 0 \Leftrightarrow 1 - 0{,}2x = 0{,}2x - 1$

$\Leftrightarrow 0{,}4x = 2 \Leftrightarrow x = 5$

| $x$ | 0 | | 5 | | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | + | + | 0 | – | – |
| $f$ | Mín. | ↗ | Máx. | ↘ | Mín. |

$\therefore f(5) = 4$ é um máximo relativo e como $4 < 6$, o barco não pode passar por baixo da ponte.

**5.**

**5.1** $\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to1} \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}}^{\frac{0}{0}} = \lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-1}{e^{x-1}-1} = \lim\limits_{x\to1} \frac{(x-1)(x+1)}{e^{x-1}-1} = \frac{\lim\limits_{x\to1}(x+1)}{\underbrace{\lim\limits_{x-1\to0} \frac{e^{x-1}-1}{x-1}}_{\text{lim. notável}}} = \frac{2}{1} = 2 = g(1)$

$\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to1} \left[3 + \frac{sen(x-1)}{1-x}\right]^{\frac{0}{0}} = 3 - \underbrace{\lim\limits_{x-1\to0} \frac{sen(x-1)}{x-1}}_{\text{lim. notável}} = 3 - 1 = 2 = g(1)$

Como se tem $\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to1^+} g(x) = g(1)$, concluiu-se que $g$ é contínua no ponto 1.

**5.2** $g(x) = 3 \underset{x \in ]4,\,5[}{\Leftrightarrow} 3 + \frac{sen(x-1)}{1-x} = 3 \Leftrightarrow \frac{sen(x-1)}{1-x} = 0 \Leftrightarrow sen(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 1 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$k = 0 \to x = 1 \notin ]4, 5[$

$k = 1 \to x = 1 + \pi \in ]4, 5[$

$k = 2 \to x = 1 + 2\pi \notin ]4, 5[$

$\therefore$ em $]4, 5[$, $g(x) = 3 \Leftrightarrow \boxed{x = 1 + \pi}$

**5.3** Em $]-\infty, 0[$, $g(x) = \dfrac{1-x^2}{1-e^{x-1}}$

Abcissa do ponto $A$: $\dfrac{1-x^2}{1-e^{x-1}} = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \underbrace{\Leftrightarrow}_{x<0} x = -1$

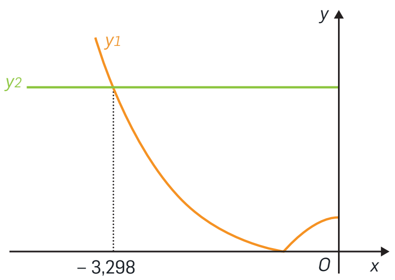
Sendo $x < 0$ a abcissa de $P$, a sua ordenada é $g(x) < 0$.

Como a área do $\Delta[OAP]$ é 5, tem-se:

$$\therefore \frac{\overline{OA} \times |g(x)|}{2} = 5 \Leftrightarrow \frac{1 \times \left|\frac{1-x^2}{1-e^{x-1}}\right|}{2} = 5 \Leftrightarrow \left|\frac{1-x^2}{1-e^{x-1}}\right| = 10$$

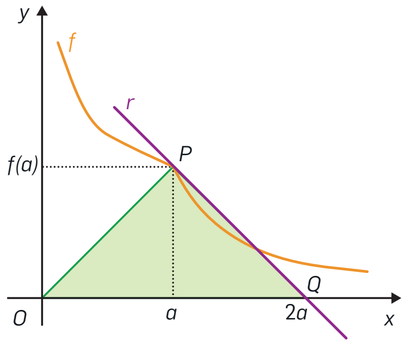
Na figura ao lado estão, em $[-5, 0] \times [0, 15]$, representados os gráficos definidos por:

$y_1 = \left|\dfrac{1-x^2}{1-e^{x-1}}\right|$ e $y_2 = 10$




$\therefore$ a abcissa pedida é $\boxed{-3{,}3}$.

**6.** Como $\overline{OP} = \overline{PQ}$, o $\Delta[OPQ]$ é isósceles.




1.º processo:

Equação de $r$: $y - f(a) = m_r(x - a) \Leftrightarrow y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$Q \in r$, logo $0 - f(a) = f'(a)(2a - a) \Leftrightarrow -\dfrac{f(a)}{a} = f'(a)$

$\therefore f'(a) + \dfrac{f(a)}{a} = -\dfrac{f(a)}{a} + \dfrac{f(a)}{a} = \boxed{0}$

2.º processo:

Vetor diretor de r: $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (a, -f(a))$

$\therefore m_r = \dfrac{-f(a)}{a}$ e como $m_r = f'(a)$, tem-se $f'(a) + \dfrac{f(a)}{a} = \dfrac{-f(a)}{a} + \dfrac{f(a)}{a} = \boxed{0}$

**FIM**