Exame Nacional de 2016

Prova Escrita de Matemática A
12.º Ano de Escolaridade
Prova 635/1.ª Fase/Versões 1 e 2

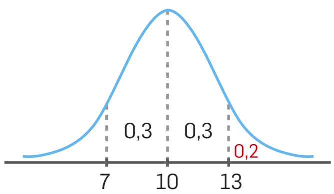
GRUPO I

Itens	Versão 1	Versão 2
1.	(C)	(D)
2.	(B)	(C)
3.	(B)	(D)
4.	(D)	(B)
5.	(D)	(C)
6.	(A)	(D)
7.	(C)	(A)
8.	(B)	(A)

Justificações:

1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(B) \times P(A \mid B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{10} - \frac{3}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{13}{20}$

2. $P(X > 13) = 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2$



3. $\lim\limits_{x \to a} \frac{ae^{x-a} - a}{x^2 - a^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to a} \frac{a(e^{x-a} - 1)}{(x-a)(x+a)} = \underbrace{\lim\limits_{x-a \to 0} \frac{e^{x-a} - 1}{x - a}}_{\text{Limite notável}} \times \lim\limits_{x \to a} \frac{a}{x+a} = 1 \times \frac{\cancel{a}}{2\cancel{a}} = \frac{1}{2}$

4. Seja m o declive da assíntota do gráfico de f, sendo $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = m$.

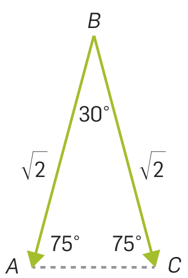
$\therefore \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x) + e^x - x}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} - \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x} = 1 \Leftrightarrow m + \frac{e^{-\infty}}{-\infty} - 1 = 1$

$\Leftrightarrow m + \underbrace{\frac{0}{-\infty}}_{0} = 2 \Leftrightarrow m = 2$

5. Área do trapézio $= \frac{\overline{QR} + \overline{OP}}{2} \times \overline{PQ} \underset{\alpha \in 4.^{\text{o}}\,Q}{=} \frac{-\text{sen}\,\alpha + 1 + 1}{2} \times \cos\alpha = \frac{(2 - \text{sen}\,\alpha)\cos\alpha}{2} = \cos\alpha - \frac{\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}{2}$

6. $z = -3cis\theta = 3cis\,\pi \times cis\theta = 3cis\,(\pi + \theta)$
$\therefore\ \theta \in 3.^{\text{o}}\,Q \Rightarrow \pi + \theta \in 1.^{\text{o}}\,Q$

7. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos 30^{\text{o}} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$



8. $\lim u_n = \lim v_n \Leftrightarrow \lim\left(\frac{k}{2} + \frac{3}{2n}\right) = \lim\left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] \Leftrightarrow \frac{k}{2} + 0 = \ln\left[\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] \Leftrightarrow \frac{k}{2} = \ln(e) \Leftrightarrow k = 2 \times 1 \Leftrightarrow k = 2$

GRUPO II

1. $-1+\sqrt{3}i = \left|-1+\sqrt{3}i\right| \, cis(\alpha)$ sendo $\left|-1+\sqrt{3}i\right| = 2$ e $tg\,\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \to \alpha \underbrace{=}_{\left(-1,\sqrt{3}\right) \in 2.^{\circ}\,Q} \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$

$\therefore\ z_1 = \dfrac{8cis\,\theta}{2cis\,\dfrac{2\pi}{3}} = \dfrac{8}{2}\,cis\left(\theta - \dfrac{2\pi}{3}\right) \to \overline{z}_1 = 4cis\left(\dfrac{2\pi}{3} - \theta\right)$

$\therefore\ \overline{z}_1 \times z_2 = 4cis\left(\dfrac{2\pi}{3} - \theta + 2\theta\right) = 4cis\left(\dfrac{2\pi}{3} + \theta\right)$

Para que $\overline{z}_1 \times z_2$, seja um número real, tem-se:

$\dfrac{2\pi}{3} + \theta = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = -\dfrac{2\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$k = 0 \to \theta = -\dfrac{2\pi}{3} \notin]0, \pi[$

$k = 1 \to \theta = \dfrac{\pi}{3} \in]0, \pi[$

$k = 2 \to \theta = \dfrac{4\pi}{3} \notin]0, \pi[$

$\therefore\ \theta = \boxed{\dfrac{\pi}{3}}$

2.

2.1. Se as bolas têm os números 1, 2 e 4 , logo, os produtos possíveis (valores de X) de dois fatores são 1 (1×1) , 2 (2×1), 4$(4 \times 1$ e $2 \times 2)$ e 8 (2×4)

$\therefore\ P(X=1) = \dfrac{{}^4C_2}{{}^9C_2} = \dfrac{1}{6},\ P(X=2) = \dfrac{{}^4C_1 \times {}^4C_1}{{}^9C_2} = \dfrac{4}{9},\ P(X=4) = \dfrac{{}^4C_1 \times {}^1C_1 + {}^4C_2}{{}^9C_2} = \dfrac{5}{18}$ e $P(X=8) = \dfrac{{}^4C_1 \times {}^1C_1}{{}^9C_2} = \dfrac{1}{9}$.

$\therefore$ a tabela de distribuição pedida é:

x_i	1	2	4	8
$P(X = x_i)$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{4}{9}$	$\dfrac{5}{18}$	$\dfrac{1}{9}$

2.2. O único n.º ímpar que pode existir é aquele cujo algarismo das unidades é o 1 (e existem quatro bolas com o n.º 1).

1.º processo:
Depois de colocar uma dessas bolas, tem-se que o n.º pedido é:

$$\underbrace{{}^8C_3}_{\text{8 posições para as outras 3 bolas com 1}} \times \underbrace{{}^5C_4}_{\text{restam 5 posições para as 4 bolas com 2}} \times \underbrace{1}_{\text{resta 1 posição para a bola com 4}} = \boxed{280}$$

2.º processo:
Depois de colocar uma dessas bolas, e sabendo que restam três bolas com o n.º 1, quatro com n.º 2 e uma com o n.º 4, tem-se que o n.º pedido é: $\dfrac{8!}{3! \times 4! \times 1!} = \boxed{280}$

3.

3.1. A superfície esférica tem centro em $A(-1, 1, 1)$ e é tengente ao plano xOy , logo, o seu raio é 1.
$\therefore$ a equação pedida é $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1^2 \Leftrightarrow \boxed{(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1}$

3.2. Atendendo ao enunciado, conclui-se que a abcissa e a ordenada de V são iguais à abcissa e à ordenada do ponto médio M de $[AC]$.
Assim, $M\left(\dfrac{-1-3}{2}, \dfrac{1+3}{2}, \dfrac{1+1}{2}\right)$, ou seja , $M(-2, 2, 1)$, logo, tem-se $V(-2, 2, z)$.

Como V pertence ao plano BCV , as suas coordenadas verificam essa equação pelo que se tem:
$3 \times 2 + z - 10 = 0 \Leftrightarrow z = 4 \to \boxed{V(-2, 2, 4)}$

3.3. Como α é perpendicular à reta AC, então um seu vetor normal é colinear ao vetor $\overrightarrow{AC} = C - A = (-2, 2, 0)$, logo, a sua equação é do tipo $-2x + 2y + d = 0$.

Como $P(1, -2, -1)$ pertence a α, tem-se $-2 \times 1 + 2 \times (-2) + d = 0 \Leftrightarrow d = 6$, logo, a equação de α é $-2x + 2y + 6 = 0$ que é equivalente a $x - y - 3 = 0$.

1.º processo:
A interseção entre os planos α e BCV é uma reta, pelo que se tem:

$$\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 3y + z - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ y = \dfrac{-z + 10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x - 3 = y = \frac{-z + 10}{3} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{x - 3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z - 10}{-3}}_{\text{Equações cartesianas da reta pedida}}$$

$\therefore$ conclui-se que a reta pedida contém o ponto de coordenadas $(3, 0, 10)$ e tem como vetor diretor $(1, 1, -3)$, logo, uma sua equação vetorial é $\boxed{(x, y, z) = (3, 0, 10) + k\,(1, 1, -3),\ k \in \mathbb{R}}$

2.º processo:
A interseção entre os planos α e BCV é uma reta definida por $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 3y + z - 10 = 0 \end{cases}$

Fazendo $x = 0$, obtém-se:

$$\begin{cases} 0 - y - 3 = 0 \\ 3y + z - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ -9 + z - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ z = 19 \end{cases} \rightarrow \text{o ponto } Q(0, -3, 19) \text{ pertence à reta.}$$

Fazendo $x = 3$, obtém-se:

$$\begin{cases} 3 - y - 3 = 0 \\ 3y + z - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 + z - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 10 \end{cases} \rightarrow \text{o ponto } R(3, 0, 10) \text{ pertence à reta.}$$

Um vetor diretor da reta é $\overrightarrow{QR} = R - Q = (3, 3, -9)$, logo, uma sua equação vetorial é $\boxed{(x, y, z) = (3, 0, 10) + k(3, 3, -9),\ k \in \mathbb{R}}$

4.

4.1. $h'(t) = 0 + \dfrac{1}{2\pi}[\cos(2\pi)]' + t'sen(2\pi t) + t(sen(2\pi t))' = \dfrac{1}{\cancel{2\pi}}(-\cancel{2\pi}\, sen(2\pi t)) + sen(2\pi t) + t \times 2\pi \cos(2\pi t)$

$= \cancel{-sen(2\pi t)} + \cancel{sen(2\pi t)} + 2\pi t \cos(2\pi t) = 2\pi t \cos(2\pi t)$

$h'(t) = 0 \Leftrightarrow 2\pi t = 0 \vee \cos(2\pi t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee \underbrace{2\cancel{\pi} t = \dfrac{\cancel{\pi}}{2} \vee 2\cancel{\pi} t = \dfrac{3\cancel{\pi}}{2}}_{t \in [0,1] \Leftrightarrow 2\pi t \in [0, 2\pi]} \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \dfrac{1}{4} \vee t = \dfrac{3}{4}$

t	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		1
h'	0	+	0	—	0		2π
h	Mín.	↗	Máx.	↘	Mín.	↗	Máx.

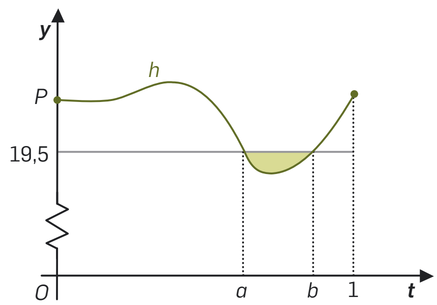
$\therefore h(0) \approx 20{,}16$ é um mínimo relativo e $h\left(\dfrac{3}{4}\right) = 19{,}25$ um mínimo absoluto, logo, $m = 19{,}25$.

$h(1) \approx 20{,}16$ é um máximo relativo e $h\left(\dfrac{1}{4}\right) = 20{,}25$ um máximo absoluto, logo, $M = 20{,}25$.

$\therefore A = 20{,}25 - 19{,}25 = \boxed{1}$ metro.

4.2. Recorrendo à calculadora gráfica, obtêm-se:
$a \approx 0{,}606$ e $b \approx 0{,}877$
$\therefore b - a \approx 0{,}271 \approx \boxed{0{,}27}$

Interpretação: durante o primeiro minuto, a distância de um ponto P do tabuleiro a um ponto fixo do vale foi inferior a 19,5 metros durante, aproximadamente, 0,27 minutos.



5.

5.1. $p = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = f'(-1) = e^{-1}[(-1)^2 - 1 + 1] = \dfrac{1}{e}$

$\therefore q = -\dfrac{1}{\frac{1}{e}} = \boxed{-e}$

Interpretação: atendendo que p é o declive da reta tangente ao grafico de f no ponto de abcissa -1, conclui-se que q é o declive de uma reta perpendicular a essa (pois q é igual ao simétrico do inverso de p).

5.2. $f''(x) = (e^x)'(x^2 + x + 1) + e^x(x^2 + x + 1)' = e^x(x^2 + x + 1) + e^x(2x + 1) = e^x(x^2 + 3x + 2)$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{impossível em IR}} \vee x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$$

Dado que $e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, basta analisar o sinal de $x^2 + 3x + 2$.

x	$-\infty$	-2		-1	$+\infty$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$

$\therefore$ conclui-se que o gráfico de f tem:

- a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -2]$ e em $[-1, +\infty[$;
- a concavidade voltada para baixo em $[-2, -1]$;
- dois pontos de inflexão, de abcissas -2 e -1.

6.

6.1. Como f é uma função contínua no seu domínio (composição de funções contínuas, logarítmica e racional), apenas $x = -1$ e $x = 1$ poderão ser as equações das assíntotas verticais do gráfico de f.

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \ln\frac{-2}{0^-} = \ln(+\infty) = +\infty \to \boxed{x = -1}$ é a equação de uma assíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \ln\frac{0^+}{2} = \ln(0^+) = -\infty \to \boxed{x = 1}$ é a equação de outra assíntota vertical.

6.2. Sejam A e B os pontos do gráfico de f de abcissas, respetivamente, a e $-a$.

1.º processo:

O ponto médio do segmento $[AB]$ tem coordenadas $\left(0, \frac{f(a) + f(-a)}{2}\right)$:

$$f(a) = \ln\frac{a-1}{a+1} \wedge f(-a) = \ln\frac{-a-1}{-a+1}\text{, logo, } \frac{f(a) + f(-a)}{2} = \frac{\ln\frac{a-1}{a+1} + \ln\frac{-a-1}{-a+1}}{2} = \frac{\ln\left[\frac{a-1}{a+1} \times \left(\frac{-a-1}{-a+1}\right)\right]}{2} = \frac{\ln\left(\frac{-a^2 \cancel{-a} \cancel{+a} + 1}{-a^2 \cancel{+a} \cancel{-a} + 1}\right)}{2} = \frac{\ln 1}{2} = 0$$

$\therefore$ tanto a abcissa como a ordenada de M são iguais a 0, logo, o segmento $[AB]$ passa na origem do referencial, pelo que também a reta AB passa na origem do referencial, c.q.d.

2.º processo:

Seja m o declive da reta AB. Então:

$$m = \frac{f(a) + f(-a)}{a - (-a)} = \frac{\ln\frac{a-1}{a+1} - \ln\frac{-a-1}{-a+1}}{2a} = \frac{\ln\frac{\frac{a-1}{a+1}}{\frac{-a-1}{-a+1}} + \ln}{2a} = \frac{\ln\frac{-a^2 + a + a - 1}{-a^2 - a - a - 1}}{2a} = \frac{\ln\frac{-(a-1)^2}{-(a+1)^2}}{2a} = \frac{\cancel{2}\ln\frac{a-1}{a+1}}{\cancel{2}a} = \frac{\ln\frac{a-1}{a+1}}{a} = \frac{f(a)}{a}$$

$\therefore$ a equação reduzida de AB é dada por $y = \frac{f(a)}{a}x + b$

Atendendo que, por exemplo, o ponto de coordenadas $(a, f(a))$ pertence ao gráfico de AB, tem-se:

$f(a) = \frac{f(a)}{\cancel{a}} \times \cancel{a} + b \Leftrightarrow 0 = b$, logo, $y = \frac{f(a)}{a}x$ é a equação da reta AB e passa na origem do referencial, c.q.d.

FIM