

**PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO  
SECUNDÁRIO  
(CÓDIGO DA PROVA 635) – 1ª FASE – 23 DE JUNHO 2016  
GRUPO I**

1.

$$\text{Como } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{6},$$

temos que:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{10} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{20}$$

Assim,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{10} - \frac{1}{20} = \frac{8}{20} + \frac{6}{20} - \frac{1}{20} = \frac{13}{20}$$

Resposta correta:

Versão 1: C
Versão 2: D

2.

Dado que  $X$  é uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio 10, então

$$P(X < 10) = P(X > 10) = 0,5 \quad \text{e} \quad P(7 < X < 10) = P(10 < X < 13) = 0,3$$

Assim,

$$P(X > 13) = P(X > 10) - P(10 < X < 13) = 0,5 - 0,3 = 0,2$$

Resposta correta:

Versão 1: B
Versão 2: C

3.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{a e^{x-a} - a}{x^2 - a^2} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{a(e^{x-a} - 1)}{(x-a)(x+a)} = \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{a}{x+a} \times \frac{e^{x-a} - 1}{x-a} \right) = \\ &= \frac{a}{a+a} \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{x-a} - 1}{x-a} = \frac{a}{2a} \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{x-a} - 1}{x-a} = \\ &= \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{x-a} - 1}{x-a}\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável:  $y = x - a$ ,

Como  $x \rightarrow a$  então  $y \rightarrow 0$

e assim,

$$\frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{x-a} - 1}{x-a} = \frac{1}{2} \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{limite notável}} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

Resposta correta:

Versão 1: B
Versão 2: D

4.

Como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) + e^x - x}{x} = 1$

então,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{f(x)}{x} + \frac{e^x}{x} - \frac{x}{x} \right) = 1 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{f(x)}{x} \right) + \frac{e^{-\infty}}{-\infty} - 1 = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{f(x)}{x} \right) + 0 - 1 = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{f(x)}{x} \right) - 1 = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{f(x)}{x} \right) = 1 + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{f(x)}{x} \right) = 2\end{aligned}$$

Pelo que o declive da assíntota oblíqua ao gráfico de  $f$  é igual a 2.

Resposta correta:

Versão 1: D
Versão 2: B

5.

Tendo em conta de que área do trapézio  $[OPQR]$  é dada por:  $A_{[OPQR]} = \frac{\overline{PO} + \overline{QR}}{2} \times \overline{PQ}$

e que  $\overline{PO} = 1$  e  $\overline{PQ} = \cos \alpha$ , então

$\overline{QR} = 1 + (-\sin \alpha)$ , pois  $\sin \alpha$  no quarto quadrante é negativo.

Temos então que:

$$A = \frac{1 + (1 - \sin \alpha)}{2} \times \cos \alpha = \frac{2 - \sin \alpha}{2} \times \cos \alpha = \cos \alpha - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2},$$

Resposta correta:

Versão 1: D
Versão 2: C

6.

Considerando que:

$z = -3 \operatorname{cis} \theta = 3 \times \operatorname{cis} \pi \times \operatorname{cis} \theta = 3 \operatorname{cis}(\pi + \theta)$  temos que um argumento  $z$  é  $\pi + \theta$

Como  $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ , então  $\pi + \pi < \pi + \theta < \pi + \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 2\pi < \pi + \theta < \frac{5\pi}{2}$ ,

Pelo que, a imagem geométrica do complexo  $z$  pertence ao primeiro quadrante.

Resposta correta:

Versão 1: A
Versão 2: D

7.

Como o triângulo  $[ABC]$  é isósceles, então  $\hat{ACB} = \hat{CAB} = 75^\circ$ , pelo que

$$\hat{ABC} = 180^\circ - 2 \times 75^\circ = 30^\circ.$$

$$\text{Logo, } \overline{BA} \cdot \overline{BC} = \|\overline{BA}\| \times \|\overline{BC}\| \times \cos(\widehat{BA \overline{BC}}) = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \cos(30^\circ) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Resposta correta:

Versão 1: C
Versão 2: A

8.

Tem-se que:

- $\lim(u_n) = \lim \frac{kn + 3}{2n} = \lim \frac{k}{2} = \frac{k}{2}$
- $\lim(v_n) = \lim \left( \ln \left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right) \right) = \ln \left( \lim \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right) = \ln(e^1) = 1.$

Logo, como  $\lim(u_n) = \lim(v_n)$ , vem que  $\frac{k}{2} = 1 \Leftrightarrow k = 2.$

Resposta correta:

Versão 1: B
Versão 2: A

## GRUPO II

1.

Escrevendo  $-1 + \sqrt{3}i$  na forma trigonométrica temos  $-1 + \sqrt{3}i = \rho \operatorname{cis} \theta$ , onde:

- $\rho = |-1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$
- $\theta$  é um argumento de  $-1 + \sqrt{3}i$  com  $\theta \in 2.^\circ$  quadrante e  $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{-1}$ , vem  
 $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$  (argumento positivo mínimo).

Assim,  $-1 + \sqrt{3}i = 2 \operatorname{cis} \left( \frac{2\pi}{3} \right).$

Substituindo em  $z_1$ , temos:

$$z_1 = \frac{8 \operatorname{cis} \theta}{-1 + \sqrt{3}i} \Leftrightarrow z_1 = \frac{8 \operatorname{cis} \theta}{2 \operatorname{cis} \left( \frac{2\pi}{3} \right)} \Leftrightarrow z_1 = 4 \operatorname{cis} \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right)$$

pelo que,  $\bar{z}_1 = 4 \operatorname{cis} \left( -\theta + \frac{2\pi}{3} \right) e$

$$\bar{z}_1 \times z_2 = 4 \operatorname{cis} \left( -\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \times \operatorname{cis} (2\theta) = 4 \operatorname{cis} \left( -\theta + \frac{2\pi}{3} + 2\theta \right) = 4 \operatorname{cis} \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right)$$

Para ser um número real  $\theta + \frac{2\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = -\frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Se  $k = 0$ , temos  $\theta = -\frac{2\pi}{3} \notin ]0, \pi[$

Se  $k = 1$ , temos  $\theta = \frac{\pi}{3} \in ]0, \pi[$

Se  $k = 2$ , temos  $\theta = \frac{4\pi}{3} \notin ]0, \pi[$

Logo,  $\theta = \frac{\pi}{3}.$

## 2.

### 2.1.

Seja  $X$ : “produto dos números das duas bolas retiradas”

Os produtos podem ser:

$$1 \times 1 = 1 \quad 1 \times 2 = 2 \quad 1 \times 4 = 4 \quad 2 \times 2 = 4 \quad 2 \times 4 = 8$$

Logo, os produtos possíveis são 1, 2, 4 ou 8 (não pode ser 16, pois só existe uma bola com o número 4).

$$P(X = 1) = \frac{{}^4C_2}{{}^9C_2} = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 2) = \frac{{}^4C_1 \times {}^4C_1}{{}^9C_2} = \frac{4}{9}$$

$$P(X = 4) = \frac{{}^4C_1 \times {}^1C_1 + {}^4C_2}{{}^9C_2} = \frac{5}{18}$$

$$P(X = 8) = \frac{{}^4C_1 \times {}^1C_1}{{}^9C_2} = \frac{1}{9}$$

Assim, a tabela de distribuição da variável aleatória  $X$  é:

$x_i$	1	2	4	8
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$

### 2.2.

$$1^\circ \text{ processo: } \frac{8!}{4! \times 3!} = 280$$

$$2^\circ \text{ processo: } \frac{8! \times 4}{4! \times 4!} = 280$$

$$3^\circ \text{ processo: } {}^8C_4 \times {}^4C_3 \times {}^1C_1 = 280$$

## 3.

### 3.1.

Como a superfície esférica tem centro no ponto  $A(-1, 1, 1)$  e é tangente ao plano  $xOy$ , o seu raio é  $r = \text{dist}(A, xOy) = z_A = 1$ .

Assim, uma condição que define a superfície esférica é:

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$$

### 3.2.

Como a pirâmide  $[ABCDV]$  é quadrangular regular e a sua base  $[ABCD]$  é paralela ao plano  $xOy$ , a abcissa e a ordenada do ponto  $V$  são iguais à abcissa e ordenada do ponto médio,  $M$ , do segmento de reta  $[AC]$ .

Então,  $M\left(\frac{-1-3}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{1+1}{2}\right)$ , isto é,  $M(-2, 2, 1)$ .

Assim, as coordenadas de  $V$  são da forma  $V(-2, 2, z)$ , com  $z \in \mathbb{R}$ .

Como  $V$  pertence ao plano  $BCV$  as suas coordenadas têm de verificar a equação  $3y + z - 10 = 0$ .

Deste modo vem:  $3 \times 2 + z - 10 = 0 \Leftrightarrow z = 4$

Portanto as coordenadas do ponto  $V$  são  $(-2, 2, 4)$ .

### 3.3.

Determinemos uma equação cartesiana do plano  $\alpha$ .

Como o plano  $\alpha$  é perpendicular à reta  $AC$  o vetor  $\overline{AC}$  é um vetor normal ao plano  $\alpha$ .

$$\overline{AC} = C - A = (-3, 3, 1) - (-1, 1, 1) = (-2, 2, 0)$$

O plano  $\alpha$  é definido por uma equação da forma  $-2x + 2y + d = 0$

Como o ponto  $P(1, -2, -1)$  pertence ao plano  $\alpha$ , temos que:

$$-2 \times 1 + 2 \times (-2) + d = 0 \Leftrightarrow d = 2 + 4 \Leftrightarrow d = 6$$

Assim, uma equação cartesiana do plano  $\alpha$  que passa no ponto  $P$  e é perpendicular à reta  $AC$  é:

$$-2x + 2y + 6 = 0 \text{ equivalente a } -x + y + 3 = 0.$$

Seja  $r$  a reta de intersecção dos planos  $\alpha$  e  $BCV$ .

A reta  $r$  é definida pelas equações cartesianas:

$$\begin{cases} -x + y + 3 = 0 \\ 3y + z - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ y = \frac{-z + 10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ y = \frac{z - 10}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x - 3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z - 10}{-3}$$

A reta  $r$  é a reta que passa no ponto de coordenadas  $(3, 0, 10)$  e tem a direção do vetor  $\vec{r} = (1, 1, -3)$ .

Portanto uma equação vetorial da reta pedida é:

$$(x, y, z) = (3, 0, 10) + k(1, 1, -3), k \in \mathbb{R}$$

4.

4.1.

Para determinar o máximo e o mínimo absolutos da função  $h$  no intervalo  $[0, 1]$  é necessário calcular os extremos relativos de  $h$  naquele intervalo.




Começemos por determinar a expressão analítica da primeira derivada de  $h$

$$\begin{aligned} h'(t) &= (20)' + \left( \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t) \right)' + (t \times \text{sen}(2\pi t))' = \\ &= 0 + \frac{1}{2\pi} (\cos(2\pi t))' + t' \times \text{sen}(2\pi t) + t \times (\text{sen}(2\pi t))' = \\ &= \frac{1}{2\pi} (-2\pi \text{sen}(2\pi t)) + \text{sen}(2\pi t) + t \times (2\pi \cos(2\pi t)) = \\ &= -\text{sen}(2\pi t) + \text{sen}(2\pi t) + 2\pi t \times \cos(2\pi t) = \\ &= 2\pi t \times \cos(2\pi t) \end{aligned}$$

Calculemos os zeros da derivada da função  $h$ , para  $0 \leq t \leq 1$ :

$$\begin{aligned} h'(t) = 0 &\Leftrightarrow 2\pi t \times \cos(2\pi t) = 0 \Leftrightarrow (t = 0 \vee \cos(2\pi t) = 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left( t = 0 \vee 2\pi t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left( t = 0 \vee t = \frac{2k+1}{4}, k \in \mathbb{Z} \right) \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{1}{4} \vee t = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

$t$	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		1
$h'(t)$	0	+	0	-	0	+	$2\pi$
$h(t)$	$h(0)$		$h\left(\frac{1}{4}\right)$		$h\left(\frac{3}{4}\right)$		$h(1)$

Por observação da tabela, verificamos que  $h(0)$  e  $h\left(\frac{3}{4}\right)$  são mínimos relativos e que  $h\left(\frac{1}{4}\right)$  e  $h(1)$  são máximos relativos de  $h$ .

Como  $h(0) = 20 + \frac{1}{2\pi} \approx 20,16$  ;  $h\left(\frac{1}{4}\right) = 20,25$  ;  $h\left(\frac{3}{4}\right) = 19,25$  e

$h(1) = 20 + \frac{1}{2\pi} \approx 20,16$ , podemos afirmar que os extremos absolutos de  $h$  são:

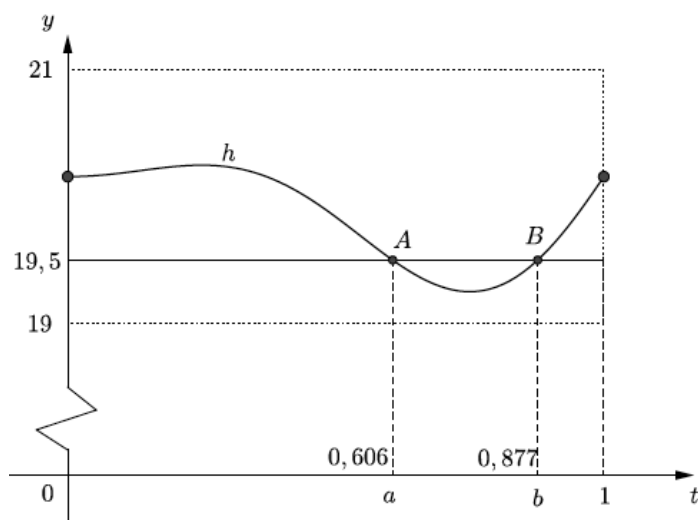
$M = h\left(\frac{1}{4}\right) = 20,25$  e  $m = h\left(\frac{3}{4}\right) = 19,25$ , respetivamente máximo e mínimo absolutos de  $h$ .

Assim,  $A = M - m = 20,25 - 19,25 = 1$

De onde se conclui que, a amplitude  $A$  da oscilação do tabuleiro da ponte, no intervalo  $[0, 1]$ , é de 1 metro.

## 4.2.

Na figura estão representados, de acordo com o enunciado, o gráfico da função  $h$  e a reta de equação  $y = 19,5$ , obtidos na janela de visualização  $[0, 1] \times [19, 21]$ , bem como os pontos  $A$  e  $B$ , de interseção dos dois gráficos.



O conjunto solução da condição  $h(t) < 19,5$  é um intervalo da forma  $]a, b[$  em que  $a$  e  $b$  são as abscissas dos pontos  $A$  e  $B$ , respetivamente.

Recorrendo à calculadora gráfica, obtém-se para  $a$  e  $b$  os valores aproximados às milésimas:  $a \approx 0,606$  e  $b \approx 0,877$ .

Assim, o valor arredondado às centésimas de  $b - a$  é  $0,27$ .

No contexto da situação descrita, podemos concluir que no primeiro minuto, a distância de um ponto  $P$  do tabuleiro a um ponto fixo do vale, foi inferior a  $19,5$  metros durante cerca de  $0,27$  minutos.

## 5.

### 5.1.

Sabemos que  $p$  corresponde ao valor da derivada da função  $f$  no ponto de abcissa  $-1$ . Assim,

$$p = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = f'(-1) = e^{-1} \times \left( (-1)^2 + (-1) + 1 \right) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\text{Logo, } q = \frac{1}{-p} = -\frac{1}{\frac{1}{e}} = -e.$$

Como  $q$  é igual ao simétrico do inverso de  $p$  (declive da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abcissa  $x = -1$ ), então podemos afirmar que  $q$  é igual ao declive de uma reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abcissa  $x = -1$ .



## 5.2.

Para estudar o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão do gráfico de  $f$ , determinemos a expressão analítica da segunda derivada de  $f$ .

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left( e^x \times (x^2 + x + 1) \right)' = (e^x)' \times (x^2 + x + 1)' = \\ &= e^x \times (x^2 + x + 1) + e^x \times (2x + 1) = \\ &= e^x \times (x^2 + 3x + 2) \end{aligned}$$

Calculemos os zeros da segunda derivada de  $f$ :

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow e^x \times (x^2 + 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{equação impossível}} \vee x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1 \end{aligned}$$

Assim, estudando a variação de sinal da segunda derivada e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de  $f$ , temos:

$x$	$-\infty$	$-2$		$-1$	$+\infty$
$e^x$	+	+	+	+	+
$x^2 + 3x + 2$	+	0	-	0	+
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	∪	P. I.	∩	P. I.	∪

Podemos então concluir que o gráfico da função  $f$  tem:

- a concavidade voltada para baixo no intervalo  $] -2, -1[$ ;
- a concavidade voltada para cima em  $] -\infty, -2[$  e em  $] -1, +\infty[$ ;
- dois pontos de inflexão de abcissas  $-2$  e  $-1$ .

**6.****6.1.**

Como  $f$  é uma função contínua em  $]-\infty, -1[$  e em  $]1, +\infty[$  (porque resulta de operações entre funções contínuas neste domínio), então as retas de equação  $x = -1$  e  $x = 1$  são as únicas retas verticais que podem ser assíntotas do gráfico de  $f$ .

Para averiguar se as retas de equação  $x = -1$  e  $x = 1$  são assíntotas do gráfico de  $f$ , calcule-se:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x):$$

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left( \ln \left( \frac{x-1}{x+1} \right) \right) = \ln \left( \frac{-1^- - 1}{-1^- + 1} \right) = \ln \left( \frac{-2}{0^-} \right) = \ln(+\infty) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \ln \left( \frac{x-1}{x+1} \right) \right) = \ln \left( \frac{1^+ - 1}{1^+ + 1} \right) = \ln \left( \frac{0^+}{2} \right) = \ln(0^+) = -\infty.$

Assim, como ambos os limites são infinitos, podemos concluir que as duas retas de equação  $x = -1$  e  $x = 1$  são assíntotas verticais do gráfico de  $f$  e que não existe qualquer outra assíntota vertical.

**6.2.**

Calculando o declive da reta que contém os pontos de abcissas  $-a$  e  $a$ , temos:

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)} = \frac{\ln \left( \frac{a-1}{a+1} \right) - \ln \left( \frac{-a-1}{-a+1} \right)}{a+a} = \frac{\ln \left( \frac{\frac{a-1}{a+1}}{\frac{-a-1}{-a+1}} \right)}{2a} = \\ &= \frac{\ln \left( \frac{(a-1)(-a+1)}{(a+1)(-a-1)} \right)}{2a} = \frac{\ln \left( \frac{(a-1)(-(a-1))}{(a+1)(-(a+1))} \right)}{2a} = \frac{\ln \left( \frac{-(a-1)^2}{-(a+1)^2} \right)}{2a} = \\ &= \frac{\ln \left( \left( \frac{a-1}{a+1} \right)^2 \right)}{2a} = \frac{2 \ln \left( \frac{a-1}{a+1} \right)}{2a} = \frac{\ln \left( \frac{a-1}{a+1} \right)}{a} \end{aligned}$$

Como a reta contém o ponto de coordenadas  $\left( a, \ln \left( \frac{a-1}{a+1} \right) \right)$ , substituindo as coordenadas e o declive na equação  $y = mx + b$ , podemos determinar o valor da ordenada na origem:

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{a-1}{a+1} \right) &= \frac{\ln \left( \frac{a-1}{a+1} \right)}{a} \times a + b \Leftrightarrow \ln \left( \frac{a-1}{a+1} \right) = \ln \left( \frac{a-1}{a+1} \right) + b \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln \left( \frac{a-1}{a+1} \right) - \ln \left( \frac{a-1}{a+1} \right) = b \\ &\Leftrightarrow b = 0 \end{aligned}$$

Como a ordenada na origem é zero, podemos concluir que a reta passa na origem do referencial.

**FIM**