GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA
IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/Época Especial

15 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2015

Página em branco

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis e, a seguir, passados a tinta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – *raio*)

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume do cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis}\theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis}\theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Página em branco

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- $P(A \cup B) = 0{,}7$
- $P(B) = 0{,}4$
- $P(A \cap B) = 0{,}2$

Qual é o valor de $P(B \mid A)$?

(A) $0{,}25$ **(B)** $0{,}3$ **(C)** $0{,}35$ **(D)** $0{,}4$

2. Nove jovens, três rapazes e seis raparigas, vão dispor-se, lado a lado, para uma fotografia.

De quantas maneiras o podem fazer, de modo que os rapazes fiquem juntos?

(A) $40\,140$ **(B)** $30\,240$ **(C)** $20\,340$ **(D)** $10\,440$

3. Seja a um número real.

Seja a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = e^{a \ln x}$

Considere, num referencial o.n. xOy, o ponto $P(2,8)$

Sabe-se que o ponto P pertence ao gráfico de f

Qual é o valor de a ?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

4. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f

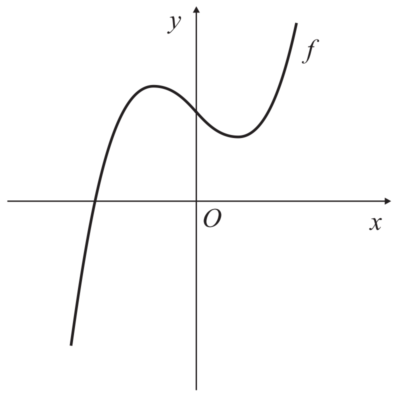
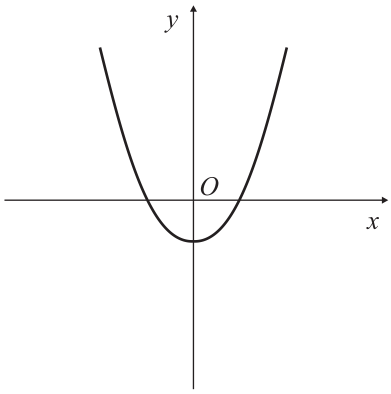


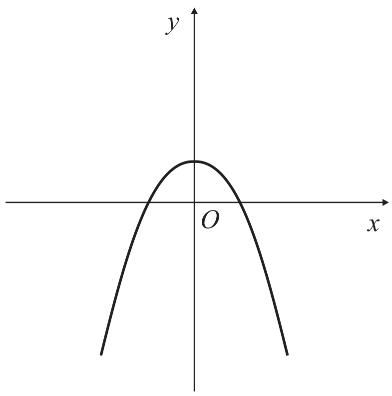
Figura 1

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f'', segunda derivada da função f ?

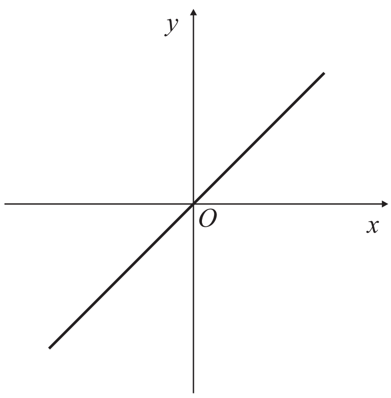
(A)



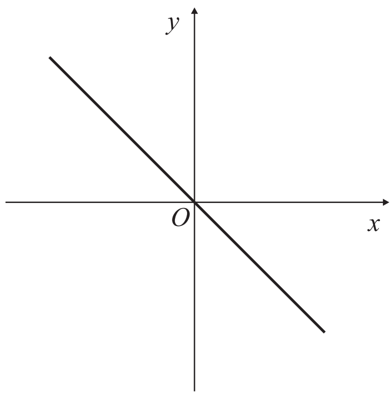
(B)



(C)



(D)



5. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$

Sabe-se que $f'(2)=6$ $(f'$ designa a derivada de $f)$

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x^2-2x}$?

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6

6. Na Figura 2, está representado, no plano complexo, um quadrado cujo centro coincide com a origem e em que cada lado é paralelo a um eixo.

Os vértices deste quadrado são as imagens geométricas dos complexos z_1, z_2, z_3 e z_4

Qual das afirmações seguintes é **falsa**?

(A) $|z_3 - z_1| = |z_4 - z_2|$

(B) $z_1 + z_4 = 2\,\mathrm{Re}(z_1)$

(C) $\dfrac{z_4}{i} = z_1$

(D) $-\overline{z_1} = z_2$

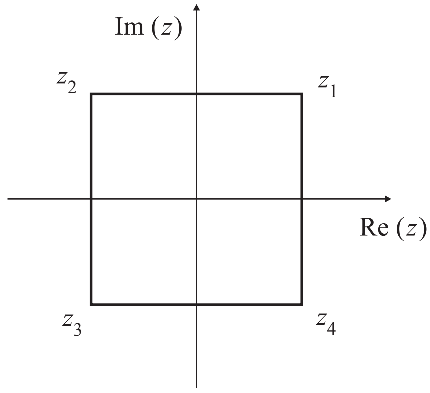


Figura 2

7. Os segmentos de reta $[AB]$ e $[BC]$ são lados consecutivos de um hexágono regular de perímetro 12

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$?

(A) -3

(B) -2

(C) 2

(D) 3

8. De uma progressão geométrica (a_n), sabe-se que o terceiro termo é igual a $\dfrac{1}{4}$ e que o sexto termo é igual a 2

Qual é o valor do vigésimo termo?

(A) 8192 **(B)** $16\,384$

(C) $32\,768$ **(D)** $65\,536$

Página em branco

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z_1 = (1+i)^6$ e $z_2 = \dfrac{8i}{\operatorname{cis}\left(-\frac{6\pi}{5}\right)}$

Sabe-se que as imagens geométricas dos complexos z_1 e z_2 são vértices consecutivos de um polígono regular de n lados, com centro na origem do referencial.

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de n

2. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano β definido pela condição $2x - y + z - 4 = 0$

2.1. Considere o ponto $P(-2, 1, 3a)$, sendo a um certo número real.

Sabe-se que a reta OP é perpendicular ao plano β, sendo O a origem do referencial.

Determine o valor de a

2.2. Considere o ponto $A(1, 2, 3)$

Seja B o ponto de intersecção do plano β com o eixo Ox

Seja C o simétrico do ponto B relativamente ao plano yOz

Determine a amplitude do ângulo BAC

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

2.3. Determine uma equação da superfície esférica de centro na origem do referencial, que é tangente ao plano β

Na resolução deste item, tenha em conta que o raio relativo ao ponto de tangência é perpendicular ao plano β

3. Um saco contém nove bolas numeradas de 1 a 9, indistinguíveis ao tato.

3.1. Retiram-se, sucessivamente e ao acaso, três bolas do saco. As bolas são retiradas com reposição, isto é, repõe-se a primeira bola antes de se retirar a segunda e repõe-se a segunda bola antes de se retirar a terceira.

Qual é a probabilidade de o produto dos números das três bolas retiradas ser igual a 2?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

3.2. Considere agora a seguinte experiência aleatória: retiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas bolas do saco, adicionam-se os respetivos números e colocam-se novamente as bolas no saco.

Considere que esta experiência é repetida dez vezes.

Seja X o número de vezes em que a soma obtida é igual a 7

A variável aleatória X tem distribuição binomial, pelo que

$$P(X=n) = {}^{10}C_n \left(\frac{1}{12}\right)^n \left(\frac{11}{12}\right)^{10-n} \quad \left(n \in \{0,1,\ldots,10\}\right)$$

Elabore uma composição em que explique:

- como se obtém o valor $\frac{1}{12}$ (probabilidade de sucesso);
- o significado de $\frac{11}{12}$, no contexto da situação descrita;
- o significado da expressão ${}^{10}C_n$, tendo em conta a sequência das dez repetições da experiência.

4. Admita que, ao longo dos séculos XIX, XX e XXI, o número de habitantes, N, em milhões, de uma certa região do globo é dado aproximadamente por

$$N = \frac{200}{1+50e^{-0,25t}} \quad (t \geq 0)$$

em que t é o tempo medido em décadas e em que o instante $t=0$ corresponde ao **final** do ano 1800.

4.1. Determine a taxa média de variação da função N no intervalo $[10, 20]$

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Interprete o resultado, no contexto da situação descrita.

4.2. Mostre que $t = \ln\left(\frac{50N}{200-N}\right)^4$

5. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}_0^+$, definida por $f(x) = x^2 e^{1-x}$

Resolva os itens **5.1.** e **5.2.** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

5.1. Estude a função f quanto à existência de assíntota horizontal.

5.2. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

5.3. Considere, num referencial o.n. xOy, três pontos, A, B e C, tais que:

- os pontos A e B pertencem ao gráfico da função f
- a abcissa do ponto B é maior do que a abcissa do ponto A
- os pontos A e B têm a mesma ordenada, a qual é igual a $1{,}2$
- o ponto C pertence ao eixo Ox e tem abcissa igual à do ponto B

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a área do quadrilátero $[OABC]$, sendo O a origem do referencial.

Na sua resposta:

– reproduza, num referencial, o gráfico da função f no intervalo $[0, 5]$

– apresente o desenho do quadrilátero $[OABC]$

– indique as abcissas dos pontos A e B arredondadas às milésimas;

– apresente a área do quadrilátero arredondada às centésimas.

6. Seja a um número real.

Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a \operatorname{sen} x$

Seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\frac{2\pi}{3}$

Sabe-se que a inclinação da reta r é igual a $\frac{\pi}{6}$ radianos.

Determine o valor de a

FIM

Página em branco

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.**	(8 × 5 pontos)	40 pontos
		40 pontos

GRUPO II

1.	15 pontos
2.	
2.1.	5 pontos
2.2.	10 pontos
2.3.	15 pontos
3.	
3.1.	15 pontos
3.2.	15 pontos
4.	
4.1.	10 pontos
4.2.	15 pontos
5.	
5.1.	15 pontos
5.2.	15 pontos
5.3.	15 pontos
6.	15 pontos
	160 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/Época Especial

Critérios de Classificação

11 Páginas

2015

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Itens de seleção

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

Itens de construção

Nos itens de resposta restrita e de resposta extensa, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

É classificada com zero pontos qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização da linguagem científica adequada.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados, devidamente identificados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam a realização de cálculos.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora gráfica», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado, que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. .... (8 × 5 pontos) .... **40 pontos**

As respostas corretas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
	D	B	C	C	A	C	B	C

GRUPO II

1. .... **15 pontos**

Escrever z_1 na forma trigonométrica .... 5 pontos

Escrever $1+i=\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ .... 2 pontos

Escrever $z_1=\left(\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^6$ .... 1 ponto

Escrever $z_1=8\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ .... 2 pontos

Escrever z_2 na forma trigonométrica .... 5 pontos

Escrever $8i=8\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .... 1 ponto

Escrever $z_2=8\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{6\pi}{5}\right)$ .... 3 pontos

Escrever $z_2=8\,\text{cis}\left(\frac{17\pi}{10}\right)$ .... 1 ponto

Reconhecer que $\frac{17\pi}{10}-\frac{3\pi}{2}=\frac{2\pi}{n}$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Obter o valor de n (10) .... 1 ponto

2.1. .... **5 pontos**

Escrever as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$, em função de a .... 1 ponto

Reconhecer que o vetor $\overrightarrow{OP}$ é colinear com o vetor de coordenadas $(2,-1,1)$ 2 pontos

Obter o valor de a $\left(-\frac{1}{3}\right)$ .... 2 pontos

2.2. .... **10 pontos**

Obter as coordenadas do ponto B .... 1 ponto

Indicar as coordenadas do ponto C .... 1 ponto

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ .... 1 ponto

Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$ .... 1 ponto

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{AB}$ .... 1 ponto

Determinar a norma do vetor $\overrightarrow{AC}$ .... 1 ponto

Obter a amplitude do ângulo BAC (55°) (**ver nota**) .... 4 pontos

Nota – Se forem considerados dois vetores cujo ângulo tenha amplitude diferente da amplitude do ângulo BAC, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

2.3. .... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo (recorrendo a uma condição cartesiana da reta que contém o raio relativo ao ponto de tangência)

Seja r a reta que contém o raio relativo ao ponto de tangência e seja T o ponto de tangência.

Reconhecer que o vetor de coordenadas $(2, -1, 1)$ é um vetor diretor da reta r .. 1 ponto

Escrever uma condição cartesiana da reta r $\left(\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}\right)$ .... 3 pontos

Determinar as coordenadas do ponto T .... 4 pontos

Escrever a condição $\frac{x}{2} = z \ \wedge \ y = -z \ \wedge \ 2x - y + z - 4 = 0$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter as coordenadas do ponto T .... 2 pontos

Obter $\overline{OT}$ .... 2 pontos

Escrever a condição $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{8}{3}$ (**ver notas 1** e **2**) .... 5 pontos

2.º Processo (recorrendo a uma equação vetorial da reta que contém o raio relativo ao ponto de tangência)

Seja r a reta que contém o raio relativo ao ponto de tangência e seja T o ponto de tangência

Reconhecer que o vetor de coordenadas $(2, -1, 1)$ é um vetor diretor da reta r .. 1 ponto

Escrever uma equação vetorial da reta r .... 2 pontos

Determinar as coordenadas do ponto T .... 5 pontos

Reconhecer que qualquer ponto da reta r tem coordenadas da forma $(2k, -k, k)$, sendo k um número real .... 2 pontos

Resolver a equação $2(2k) - (-k) + k - 4 = 0$ (ou equivalente) 2 pontos

Obter as coordenadas do ponto T .... 1 ponto

Determinar $\overline{OT}$ .... 2 pontos

Escrever a condição $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{8}{3}$ (**ver notas 1** e **2**) .... 5 pontos

Notas:

1. A escrita de $\sqrt{\frac{8}{3}}$, em vez de $\frac{8}{3}$, implica uma desvalorização de 2 pontos nesta etapa.

2. A escrita de $\leq$, em vez de $=$, implica uma desvalorização de 2 pontos nesta etapa.
A escrita de $<$ ou de $>$ ou de $\geq$ implica uma desvalorização de 3 pontos nesta etapa.

3.1. .... **15 pontos**

Reconhecer que o número de casos possíveis é 9^3 (**ver nota 1**)...................... 7 pontos

Reconhecer que o número de casos favoráveis é 3 (**ver nota 2**) .... 6 pontos

Obter a probabilidade pedida (**ver nota 3**) $\left(\frac{1}{243}\right)$ .... 2 pontos

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a 9^3, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

2. Se a expressão apresentada não for equivalente a 3, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

3. Se a etapa relativa ao número de casos possíveis e a etapa relativa ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. A mesma pontuação de 0 pontos deve ser atribuída caso o valor obtido não pertença ao intervalo $[0, 1]$

3.2. .... **15 pontos**

A composição deve contemplar os tópicos seguintes:

A) referir que $\frac{1}{12} = \frac{3}{{}^9C_2}$, sendo ${}^9C_2$ o número de casos possíveis (número de maneiras de escolher duas de nove bolas) e 3 o número de casos favoráveis $(1 \text{ e } 6,\ 2 \text{ e } 5,\ 3 \text{ e } 4)$;

B) referir que, no contexto da situação descrita, $\frac{11}{12}$ é a probabilidade de, ao serem retiradas, ao acaso, duas bolas do saco, a soma dos seus números ser diferente de 7

C) referir que ${}^{10}C_n$ é o número de maneiras de escolher as posições dos n sucessos, na sequência das dez provas.

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
6	Na resposta, são contemplados os três tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	15
5	Na resposta, são contemplados os três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	13
4	Na resposta, são contemplados apenas dois tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	10
3	Na resposta, são contemplados apenas dois tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	8
2	Na resposta, é contemplado apenas um tópico, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	5
1	Na resposta, é contemplado apenas um tópico, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	3

4.1. .... **10 pontos**

Escrever $tmv_{[10,20]} = \dfrac{N(20)-N(10)}{20-10}$ .... 2 pontos

Obter o valor de $\dfrac{N(20)-N(10)}{20-10}$ com a aproximação pedida (11) .... 3 pontos

Interpretar o valor obtido, no contexto da situação descrita .... 5 pontos

- Ao longo do século XX o número de habitantes da referida região do globo aumentou, em média, 11 milhões por década.

OU

- Entre os instantes correspondentes a 10 e a 20 décadas, após o final do ano 1800, o número de habitantes da referida região do globo aumentou, em média, 11 milhões por década.

4.2. .... **15 pontos**

Escrever $N = \dfrac{200}{1+50e^{-0,25t}} \Leftrightarrow N(1+50e^{-0,25t}) = 200$ .... 1 ponto

Escrever $N(1+50e^{-0,25t}) = 200 \Leftrightarrow N + 50Ne^{-0,25t} = 200$ .... 1 ponto

Escrever $N + 50N\,e^{-0,25t} = 200 \Leftrightarrow e^{-0,25t} = \dfrac{200-N}{50N}$ .... 2 pontos

Escrever $e^{-0,25t} = \dfrac{200-N}{50N} \Leftrightarrow -0,25t = \ln\left(\dfrac{200-N}{50N}\right)$ .... 3 pontos

Escrever $-0,25t = \ln\left(\dfrac{200-N}{50N}\right) \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{0,25}\ln\left(\dfrac{200-N}{50N}\right)$ .... 1 ponto

Escrever $t = -\dfrac{1}{0,25}\ln\left(\dfrac{200-N}{50N}\right) \Leftrightarrow t = -4\ln\left(\dfrac{200-N}{50N}\right)$ .... 2 pontos

Escrever $t = -4\ln\left(\dfrac{200-N}{50N}\right) \Leftrightarrow t = \ln\left(\dfrac{200-N}{50N}\right)^{-4}$ .... 3 pontos

Escrever $t = \ln\left(\dfrac{200-N}{50N}\right)^{-4} \Leftrightarrow t = \ln\left(\dfrac{50N}{200-N}\right)^{4}$ .... 2 pontos

5.1. .... **15 pontos**

Determinar $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .... 13 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2e^{1-x})$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2e^{1-x}) = e \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2e^{-x})$ .... 3 pontos

Escrever $e \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2e^{-x}) = e \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$ .... 3 pontos

Escrever $e \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = e \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{e^x}{x^2}}$ .... 3 pontos

Referir que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ .... 1 ponto

Escrever $e \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{e^x}{x^2}} = 0$ .... 2 pontos

Concluir que a reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal do gráfico da função f .... 2 pontos

5.2. .... **15 pontos**

Determinar $f'(x)$ (**ver nota**) .... 4 pontos

Aplicar a regra de derivação do produto de duas funções .... 2 pontos

Escrever $f'(x) = 2xe^{1-x} - x^2e^{1-x}$ .... 2 pontos

Escrever a equação $f'(x)=0$ .... 1 ponto

Resolver a equação $f'(x)=0$ .... 5 pontos

Escrever $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{1-x}(-x^2+2x)=0$ .... 2 pontos

Escrever $e^{1-x}(-x^2+2x)=0 \Leftrightarrow -x^2+2x=0$ .... 2 pontos

Concluir que $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$ .... 1 ponto

Estudar a função f quanto à monotonia .... 5 pontos

Apresentar um quadro de sinal de f' e de monotonia de f (ou equivalente) .... 3 pontos

Concluir que a função tem um mínimo para $x=0$ .... 1 ponto

Concluir que a função tem um máximo para $x=2$ .... 1 ponto

Nota – Se for evidente a intenção de determinar a expressão da derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é de 1 ponto.

5.3. .... **15 pontos**

Reproduzir o gráfico da função f no intervalo $[0, 5]$ (**ver notas 1** e **2**) .... 3 pontos

Desenhar o quadrilátero $[OABC]$ .... 4 pontos

Determinar a abcissa do ponto A .... 2 pontos

Determinar a abcissa dos pontos B e C .... 2 pontos

Escrever uma expressão que dê a área do quadrilátero $[OABC]$ .... 2 pontos

Obter a área pedida $(2{,}92)$ .... 2 pontos

Notas:

1. Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.
2. Se for apresentado um gráfico que não respeite o domínio da função, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

6. .... **15 pontos**

Identificar o declive da reta r com $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ .... 2 pontos

Determinar $f'(x)$ .... 3 pontos

Determinar $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, em função de a .... 3 pontos

Escrever $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ (ou equivalente) .... 4 pontos

Obter o valor de $a\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ .... 3 pontos

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** .... (8 × 5 pontos)	40 pontos
	40 pontos

GRUPO II

1.	15 pontos
2.	
2.1.	5 pontos
2.2.	10 pontos
2.3.	15 pontos
3.	
3.1.	15 pontos
3.2.	15 pontos
4.	
4.1.	10 pontos
4.2.	15 pontos
5.	
5.1.	15 pontos
5.2.	15 pontos
5.3.	15 pontos
6.	15 pontos
	160 pontos

TOTAL .... **200 pontos**