Prova Escrita de Matemática A
12.º Ano de Escolaridade
Prova 635/Versões 1 e 2

GRUPO I

Itens	Versão 1	Versão 2
1.	(B)	(C)
2.	(B)	(C)
3.	(D)	(A)
4.	(A)	(B)
5.	(C)	(D)
6.	(D)	(C)
7.	(B)	(D)
8.	(C)	(B)

Justificações:

1. $a + 2a + 0{,}4 = 1 \Leftrightarrow 3a = 0{,}6 \Leftrightarrow a = 0,2$
$\therefore\ \mu = 1 \times 0{,}2 + 2 \times 0{,}4 + 3 \times 0{,}4 = 2{,}2$

2. Há 4 bolas com números pares das quais duas são pretas (o 2 e o 4).
$\therefore\ P(A \mid B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

3. $\log_a (a^2b) = \log_a (a^2) + \log_a b = 2 \underbrace{\log_a a}_{1} + \log_a b = ?$

$\log_b a = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = b^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \log_a a = \log_a b^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{3} \log_a b \Leftrightarrow 3 = \log_s b$

$\therefore\ \log_a (a^2b) = 2 + 3 = 5$

4. f é contínua em $x = 0$ pelo que:

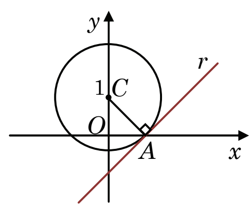
Limite notável:
$\lim\limits_{y \to 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \Leftrightarrow 2 + e^k = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{2x}{x} + \frac{\ln(x+1)}{x} \right) \Leftrightarrow \cancel{2} + e^k = \cancel{2} + 1 \Leftrightarrow k = 0$

5. $f'(x) = 3 \times 2sen(x)[sen(x)]' = 3 \times 2sen(x)\cos(x) = 3sen(2x)$
$\therefore\ f''(x) = 3 \times 2\cos(2x) = 6\cos(2x)$

6. $|z| = \overline{OA} = 1$ e, como o $\Delta[OAB]$ é equilátero, $A\hat{O}B = 60°$
Assim, um argumento de z é $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$, logo $z = cis\,\frac{5\pi}{3}$

7. Seja a a abcissa de A; então: $a^2 + (0-1)^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = 1 \rightarrow A(1, 0)$
As retas AC e r são perpendiculares, logo $m_r = -\frac{1}{m_{AC}}$
Ora, $\overrightarrow{AC} = (-1, 1)$ pelo que $m_{AC} = -1$, logo $m_r = 1$.
Atendendo a que a A pertence a r, tem-se:
$y - 0 = 1(x - 1) \Leftrightarrow y = x - 1$.



8. As sucessões $((-1)^n)$ e $((-1)^n \cdot n)$ não são monótonas e a sucessão $(1 + n^2)$ não é limitada.

GRUPO II

1. $-1+i = |-1+i|\,cis\underbrace{\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)}_{(-1,\,1)\,\in\,2.^{\circ}\,Q} = \sqrt{2}\,cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$$\therefore\ z_1 = \frac{\sqrt{2}\,cis\,\frac{3\pi}{4}}{\sqrt{2}\,cis\,\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\,cis\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\right) = 2cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\therefore\ \bar{z}_1 = cis\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\therefore\ z = \sqrt[4]{cis\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt[4]{1}\,cis\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}\right),\ k\in\{0,1,2,3\}$$

$k=0 \rightarrow cis\left(-\frac{2\pi}{12}\right) = \boxed{cis\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

$k=1 \rightarrow cis\left(\frac{4\pi}{12}\right) = \boxed{cis\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

$k=2 \rightarrow cis\left(\frac{10\pi}{12}\right) = \boxed{cis\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$

$k=3 \rightarrow cis\left(\frac{16\pi}{12}\right) = \boxed{cis\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$

2.

2.1 $d(t)=d(0) \Leftrightarrow \cancel{1}+\frac{1}{2}sen\left(\pi t+\frac{\pi}{6}\right) = \cancel{1}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} \Leftrightarrow sen\left(\pi t+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \pi t+\cancel{\frac{\pi}{6}} = \cancel{\frac{\pi}{6}}+2\pi k \vee \pi t+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow t=2k \vee \cancel{\pi}t=\frac{2\cancel{\pi}}{3}+2\cancel{\pi}k,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow t=2k \vee t=\frac{2}{3}+2k,\ k\in\mathbb{Z}$

$k=0 \rightarrow t=0 \vee t=\frac{2}{3}$

$k=1 \rightarrow t=2 \vee t=\frac{8}{3}$

$\therefore$ os instantes pedidos são $\boxed{2,\ \frac{2}{3}\ \text{e}\ \frac{8}{3}}$

2.2 Pretende-se justificar que a equação $d(t)=1,1$ é possível em $]3,4[$.
d é contínua em $[3,4]$ pois está definida por uma transformada de uma função trigonométrica.

$d(3) = 1+\frac{1}{2}sen\left(3\pi+\frac{\pi}{6}\right) = 1+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}<1,1$

$d(4) = 1+\frac{1}{2}sen\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right) = 1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{4}>1,1$

$\therefore$ 1,1 está entre $d(3)$ e $d(4)$.
Pelo teorema de Bolzano, a condição $d(t)=1,1$ é possível em $]3,4[$ c.q.p.

3.

3.1 $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(x-3)-\ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-3}{x}\right) = \ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)\right) = \ln 1 = 0$

$\therefore$ $\boxed{y=0}$ é a equação da AH do gráfico de f quando $x\rightarrow+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(1+xe^{x}) = 1+\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x}{e^{-x}}\right) = 1+\frac{-1}{\boxed{\lim\limits_{-x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{-x}}} = 1-0=1$

Limite notável: $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{e^{y}}{y}=+\infty$

$\therefore$ $\boxed{y=1}$ é a equação da AH do gráfico de f quando $x\rightarrow-\infty$.

3.2 $f(x) - 2x > 1 \underset{x \in]-\infty, 3]}{\Leftrightarrow} 1 + xe^x - 2x > 1 \Leftrightarrow x(e^x - 2) > 0$

Zero de $e^x - 2 : \ln 2$

x	$-\infty$	0		$\ln 2$	3
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$e^x - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x(e^x - 2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\therefore CS = \boxed{]-\infty, 0[\cup]\ln 2, 3]}$

3.3 $y = mx + b$, $m = f'(4)$

$f'(x) \underset{x \in]3, +\infty[}{=} 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x-3} - \dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(4) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} \to y = \dfrac{3}{4}x + b$

$f(4) = \ln 1 - \ln 4 = -\ln 4$

$\therefore -\ln 4 = \dfrac{3}{\cancel{4}} \times \cancel{4} + b \Leftrightarrow -\ln 4 - 3 = b$

$\therefore$ a equação pedida é $\boxed{y = \dfrac{3}{4}x - \ln 4 - 3}$

4. O gráfico da função f não pode ser:

- o gráfico A pois, nesse gráfico, há um ponto onde a função não é contínua, logo, não é derivável nesse ponto (o que contraria a hipótese de f ter derivada finita em todos os pontos do seu domínio);
- o gráfico B pois, nesse gráfico, há intervalos em $]-\infty, 0[$ onde a concavidade está voltada para cima (o que contraria a hipótese de se ter $f''(x) < 0$ em $]-\infty, 0[$);
- o gráfico C pois, nesse gráfico, o declive da reta tangente em $x = 0$ é negativa (o que contraria a hipótese de se ter $f'(0) > 0$).

5. 1.º processo de resolução

$P(A \cup \overline{B}) - 1 + P(B) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) - 1 + P(B)$

$= P(A) + 1 \cancel{- P(B)} - P(A \cap \overline{B}) - 1 \cancel{+ P(B)} = P(A) - P(A) \times P(\overline{B} \mid A) = P(A)(1 - P(\overline{B} \mid A))$

$= P(A) \times P(B \mid A)$ c.q.p.

2.º processo de resolução

$P(A \cup \overline{B}) - 1 + P(B) = P(A) \times P(B \mid A)$

$\Leftrightarrow P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) - 1 + P(B) = P(A \cap B)$

$\Leftrightarrow P(A) + 1 \cancel{- P(B)} - P(A \cap \overline{B}) - 1 \cancel{+ P(B)} = P(A \cap B)$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A \cap B)$ que é uma proposição verdadeira.

$\therefore P(A \cap \overline{B}) - 1 + P(B) = P(A) \times P(B \mid A)$ c.q.p.

6.

6.1 $V(1, 1, z)$ e V pertence ao plano PQV, pelo que se tem:

$6 \times 1 + z - 12 = 0 \Leftrightarrow z = 6$.

$\therefore$ as coordenadas pedidas são $\boxed{(1, 1, 6)}$.

6.2 Um ponto desse plano é $P(2, 0, 0)$ e um vetor normal é $\overrightarrow{OR} = (2, 2, 2)$.

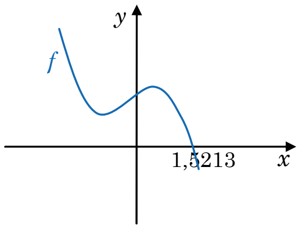
$\therefore$ a equação é $2(x-2) + 2(y-0) + 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 + 2y + 2z = 0 \Leftrightarrow \boxed{x + y + z - 2 = 0}$

6.3 $A(x, 2, x^3)$, $\overrightarrow{OA} = (x, 2, x^3)$ e $\overrightarrow{TQ}\,(2, 2, 0) - (0, 0, 2) = (2, 2, -2)$

$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{TQ} \Leftrightarrow (x, 2, x^3) \cdot (2, 2, -2) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{2x + 4 - 2x^3}_{f(x)} = 0$, sendo esta a equação a resolver.

Tendo em conta o gráfico ao lado, tem-se:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx \boxed{1{,}52}$



6.4 Há 9 faces e 7 cores pelo que se podem colorir, sem restrições, de 7^9 maneiras (n.º de casos possíveis).

Quanto ao n.º de casos favoráveis, há 4 faces triangulares para escolher 2 que serão pintadas de branco (${}^4C_2$), há 5 faces quadradas para escolher 2 que serão pintadas de azul (${}^5C_2$), sendo as restantes 5 faces pintadas com as 5 cores restantes (5!).

$$\therefore\ P = \frac{{}^4C_2 \times {}^5C_2 \times 5!}{7^9} \approx 1{,}78 \times 10^{-4} \approx \boxed{0{,}0002}$$