



EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/Época Especial

Critérios de Classificação

12 Páginas

2014

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Itens de seleção

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Itens de construção

Nos itens de resposta restrita e de resposta extensa, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

É classificada com zero pontos qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto deve ter em conta a organização dos conteúdos e a utilização da linguagem científica adequada.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação devem ser classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentam, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora deve ter em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados, devidamente identificados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação e as desvalorizações a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam a realização de cálculos.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora gráfica», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta deve ser pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado, que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas devem ser pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não deve ser desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que **não** são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

As respostas corretas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
	D	C	D	B	A	C	B	D

GRUPO II

1.1. **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $i^{-1} = \frac{1}{i}$ 1 ponto

Obter $\frac{-1-i}{2i}$ (ou equivalente) 1 ponto

Escrever z_1 na forma trigonométrica 4 pontos

Escrever $-1 - i$ na forma trigonométrica 2 pontos

Escrever $2i$ na forma trigonométrica 1 ponto

Obter z_1 na forma trigonométrica 1 ponto

Escrever $(z_1)^4$ na forma trigonométrica 2 pontos

Escrever $\overline{z_2}$ na forma trigonométrica 1 ponto

Escrever $(z_1)^4 \times \overline{z_2}$ na forma trigonométrica 2 pontos

Referir que $(z_1)^4 \times \overline{z_2}$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, porque $\arg\left((z_1)^4 \times \overline{z_2}\right) = \frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ (ou equivalente) 4 pontos

2.º Processo

Escrever $i^{-1} = \frac{1}{i}$ 1 ponto

Obter $\frac{-1-i}{2i}$ (ou equivalente) 1 ponto

Escrever z_1 na forma algébrica 3 pontos

Indicar a multiplicação de ambos os termos da fração pelo conjugado do denominador (ou equivalente) 1 ponto

Efetuar a multiplicação no numerador 1 ponto

Efetuar a multiplicação no denominador 1 ponto

Escrever $(z_1)^4$ na forma algébrica 2 pontos

Escrever $\overline{z_2}$ na forma algébrica	1 ponto
Escrever $(z_1)^4 \times \overline{z_2}$ na forma algébrica	3 pontos
Referir que $(z_1)^4 \times \overline{z_2}$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, porque	
$\operatorname{Re}((z_1)^4 \times \overline{z_2}) = \operatorname{Im}((z_1)^4 \times \overline{z_2})$ (ou equivalente)	4 pontos

1.2. 15 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha \cos\alpha$	2 pontos
Obter $w = 2\cos\alpha(\sin\alpha + i\cos\alpha)$	3 pontos
Escrever $\sin\alpha + i\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ (2 + 2).....	4 pontos
Escrever $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$	2 pontos
Referir que $2\cos\alpha > 0$, porque $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$	2 pontos
Obter w na forma trigonométrica	2 pontos

2.º Processo

Calcular $ w $	7 pontos
Escrever $ w = \sqrt{(\sin(2\alpha))^2 + (2\cos^2\alpha)^2}$	1 ponto
Obter $ w = \sqrt{4\cos^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}$ (ou equivalente)	2 pontos
Escrever $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	1 ponto
Referir que $2\cos\alpha > 0$, porque $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$	2 pontos
Escrever $ w = 2\cos\alpha$	1 ponto
Indicar um argumento de w	6 pontos
Seja θ um argumento de w	
Escrever $\operatorname{tg}\theta = \frac{2\cos^2\alpha}{\sin(2\alpha)}$	2 pontos
Obter $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	2 pontos
Escrever $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$	2 pontos
Obter w na forma trigonométrica	2 pontos

2.1. 15 pontos

Seja A o acontecimento «ser rapariga» e seja B o acontecimento «ser aluno inscrito no desporto escolar».

Podem ser admitidas outras designações para os acontecimentos.

Identificar o pedido com $P(A | B)$ 2 pontos

Escrever $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (ou equivalente) 1 ponto

Escrever $P(B) = 0,8$ 1 ponto

Escrever $P(\bar{A}) = 0,6$ 1 ponto

Calcular $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ 4 pontos

Escrever $P(\bar{B} | \bar{A}) = 0,2$ (ou equivalente) 2 pontos

Obter $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ 2 pontos

Calcular $P(\bar{A} \cap B)$ 2 pontos

Calcular $P(A \cap B)$ 2 pontos

Obter $P(A | B)$ 2 pontos

2.2. 15 pontos

Calcular o número de alunos inscritos no desporto escolar 2 pontos

Indicar o número de casos possíveis 3 pontos

Indicar o número de casos favoráveis (**ver nota 1**) (4 + 4) 8 pontos

Obter a probabilidade pedida (**ver nota 2**) 2 pontos

Notas:

1. Se, na resposta, o número de casos favoráveis for superior ao número de casos possíveis ou se o número de casos favoráveis não for coerente com o modelo evidenciado pelo número de casos possíveis, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.
2. Se, na resposta, alguma das duas etapas anteriores tiver sido pontuada com zero pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.

3. 10 pontos

Referir que $P(A) = \frac{1}{2}$ OU $P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$ 2 pontos

Escrever $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (ou equivalente) 1 ponto

Referir que, se A e B são independentes, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ 2 pontos

Escrever $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$ 1 ponto

Escrever $P(A \cup B) = \frac{1}{2} + P(B) - \frac{P(B)}{2}$ 2 pontos

Escrever $P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{P(B)}{2}$ 1 ponto

Concluir o pretendido 1 ponto

4. 15 pontos

- Determinar as coordenadas do ponto A 2 pontos
- Indicar as coordenadas do ponto B 1 ponto
- Determinar as coordenadas do ponto C 3 pontos
- Determinar as coordenadas do ponto D 2 pontos
- Determinar as coordenadas de um vetor, \vec{n} , normal ao plano que contém a face $[BCD]$ 7 pontos
- Determinar as coordenadas do vetor \overrightarrow{BC} 1 ponto
- Determinar as coordenadas do vetor \overrightarrow{CD} 1 ponto
- Referir que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ e que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ (ou equivalente) 2 pontos
- Obter as coordenadas de \vec{n} 3 pontos

5.1. 15 pontos

- Referir que a função f é contínua em $x = 2$
- sse $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$ 2 pontos
- Determinar $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ OU $f(2)$ 2 pontos
- Determinar $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ 10 pontos
- Escrever $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{\text{sen}(2-x)}{x^2+x-6} + k \right) = k + \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\text{sen}(2-x)}{x^2+x-6}$
(ou equivalente) 2 pontos
- Escrever $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\text{sen}(2-x)}{x^2+x-6} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\text{sen}(2-x)}{(x-2)(x+3)}$
(ou equivalente) 2 pontos
- Escrever $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\text{sen}(2-x)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(-y)}{y(y+5)}$
(ou equivalente) (**ver nota**) 2 pontos
- Escrever $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(-y)}{y(y+5)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-\text{sen } y}{y} \times \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y+5}$
(ou equivalente) 2 pontos
- Obter o valor de $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ 2 pontos
- Obter o valor de k 1 ponto

Nota – Se, na resposta, for referido que $x \rightarrow 2^+$ é equivalente a $x - 2 \rightarrow 0^+$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

5.2. 15 pontos

Determinar $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 14 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{x-2})$ 1 ponto

Escrever $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{x-2}) = e^{-2} \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x)$ (ou equivalente) 3 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} (-y e^{-y})$ (**ver nota**) 3 pontos

Escrever $\lim_{y \rightarrow +\infty} (-y e^{-y}) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-y}{e^y}$ 2 pontos

Escrever $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-y}{e^y} = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^y}{y}}$ 3 pontos

Obter o valor de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 2 pontos

Indicar uma equação da assíntota horizontal do gráfico da função f quando $x \rightarrow -\infty$ 1 ponto

Nota – Se, na resposta, for referido que $x \rightarrow -\infty$ é equivalente a $-x \rightarrow +\infty$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

6.1. 15 pontos

Determinar $g'(x)$ 4 pontos

Escrever $\left(\frac{1 + \ln x}{x^2}\right)' = \frac{(1 + \ln x)'x^2 - (1 + \ln x)(x^2)'}{x^4}$ 1 ponto

Calcular $(x^2)'$ 1 ponto

Calcular $(1 + \ln x)'$ 1 ponto

Obter $g'(x)$ 1 ponto

Determinar o zero de g' (**ver nota 1**) 3 pontos

Estudar a função g quanto à monotonia 6 pontos

Concluir que g' é positiva em $\left]0, e^{-\frac{1}{2}}\right[$ 1 ponto

Concluir que g' é negativa em $\left]e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$ 1 ponto

Referir que g é crescente em $\left]0, e^{-\frac{1}{2}}\right[$ (**ver nota 2**) 2 pontos

Referir que g é decrescente em $\left]e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$ (**ver nota 3**) 2 pontos

Indicar o valor de x para o qual a função g tem extremo relativo 2 pontos

Notas:

1. Se, na resposta, não for determinado o zero de g' mas se for apresentada a conclusão de que g' é negativa em $\left]e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$, e de que g' é positiva em $\left]0, e^{-\frac{1}{2}}\right[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.
2. Se, na resposta, for referido que g é crescente em $\left]0, e^{-\frac{1}{2}}\right]$, em vez de em $\left]0, e^{-\frac{1}{2}}\right[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.
3. Se, na resposta, for referido que g é decrescente em $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$, em vez de em $\left]e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

6.2. **15 pontos**

- Indicar a abcissa do ponto A 2 pontos
- Escrever uma expressão da área do triângulo $[OAB]$ em função da abcissa do ponto B 5 pontos
- Indicar \overline{OA} 1 ponto
- Escrever a altura do triângulo $[OAB]$, referente a $[OA]$, em função da abcissa do ponto B 3 pontos
- Obter uma expressão da área do triângulo $[OAB]$ 1 ponto
- Equacionar o problema 2 pontos
- Reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados na calculadora (**ver notas 1 e 2**) 4 pontos
- Indicar a abcissa do ponto B 2 pontos

Notas:

1. Se, na resposta, não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.
2. Se, na resposta, for apresentado um gráfico que não respeite o domínio da função, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

7. 15 pontos

Tópicos de resposta:

- justificar que a afirmação I é falsa;
- justificar que a afirmação II é falsa;
- justificar que a afirmação III é verdadeira.

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
6	Na resposta, são apresentados os três tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	15
5	Na resposta, são apresentados os três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	13
4	Na resposta, apenas são apresentados dois dos três tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	10
3	Na resposta, apenas são apresentados dois dos três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	8
2	Na resposta, apenas é apresentado um dos três tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	5
1	Na resposta, apenas é apresentado um dos três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	3

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a 8..... (8 × 5 pontos)	40 pontos
	<hr/>
	40 pontos

GRUPO II

1.	
1.1.	15 pontos
1.2.	15 pontos
2.	
2.1.	15 pontos
2.2.	15 pontos
3.	10 pontos
4.	15 pontos
5.	
5.1.	15 pontos
5.2.	15 pontos
6.	
6.1.	15 pontos
6.2.	15 pontos
7.	15 pontos
	<hr/>
	160 pontos

TOTAL

200 pontos