Exame Nacional de 2014 (1.ª fase)

Prova Escrita de Matemática A
12.º Ano de Escolaridade
Prova 635/Versões 1 e 2

GRUPO I

Itens	Versão 1	Versão 2
1.	(C)	(B)
2.	(A)	(D)
3.	(C)	(B)
4.	(B)	(C)
5.	(B)	(B)
6.	(D)	(C)
7.	(C)	(A)
8.	(D)	(C)

Justificações:

1. $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = 0{,}2 + ?$

Ora, $P(B|\bar{A}) = 0{,}8 \Leftrightarrow \dfrac{P(B \cap \bar{A})}{P(A)} = 0{,}8 \Leftrightarrow \dfrac{P(B \cap \bar{A})}{0{,}6} = 0{,}8 \Leftrightarrow P(B \cap \bar{A}) = 0{,}48$

$\therefore P(B) = 0{,}2 + 0{,}48 = 0{,}68$

2. Há ${}^{10}C_6$ maneiras de colocar os 6 algarismos 2; por exemplo, 222222AAAA ou 22AA22A2A2 , em que A representa um algarismo de 1 a 9 exceto o 2.
Assim, existem ${}^{10}C_6 \times 8^4$ números nas condições pedidas.

3. $\lim x_n = \dfrac{2}{\sqrt{+\infty}} = \dfrac{2}{+\infty} = 0^+$

$\therefore \lim \dfrac{2}{f(x_n)} = \dfrac{2}{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)} = \dfrac{2}{e^{\frac{1}{0^+}} - 3} = \dfrac{2}{e^{+\infty} - 3} = \dfrac{2}{+\infty} = 0$

4. Se f tem pelo menos um zero em $]0, 1[$, então tem-se (pelo corolário do teorema de Bolzano):

$f(0) \times f(1) < 0 \Leftrightarrow k(ke + 1) < 0 \Leftrightarrow [(k < 0 \wedge ke + 1 > 0) \vee (k > 0 \wedge ke + 1 < 0)] \Leftrightarrow \left[\left(k < 0 \wedge k > -\dfrac{1}{e}\right) \vee \underbrace{\left(k > 0 \wedge k < -\dfrac{1}{e}\right)}_{\text{proposição falsa}}\right]$

$\therefore k \in \left]-\dfrac{1}{e}, 0\right[$

5. $f(x) = a + \ln \dfrac{a}{x} = a + \ln a - \ln x \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{x} < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^+$

Nas opções apresentadas, apenas existe um gráfico (B) onde a função é negativa no seu domínio.

6. Se a reta r é perpendicular ao plano α, então um vetor diretor de r é colinear ao vetor normal de α, ou seja, $(4, 0, -1)$.

Assim, uma equação vetorial de r é $(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + k(4, 0, -1), k \in \mathbb{R}$ e as únicas equações cartesianas que podem representar r são as da opção (D).

7. Área $= \dfrac{\overline{DC} \times \overline{BC}}{2} = \dfrac{(3 - \overline{OC})\,\overline{BC}}{2} = ?$

Como α está no 2.º quadrante, $\overline{OC} = -\cos\alpha$ e $\overline{BC} = \operatorname{sen}\alpha$

$\therefore$ Área $= \dfrac{(3 - (-\cos\alpha)) \times \operatorname{sen}\alpha}{2} = \dfrac{1}{2} \times (3 + \cos\alpha) \times \operatorname{sen}\alpha$

8. O número que tem por imagem geométrica E é da forma $\rho cis\theta$

Ora, $\rho = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4$

O vértice C está no 2.º quadrante sobre a bissetriz dos quadrantes pares, pelo que um seu argumento é $\frac{3\pi}{4}$.

Como $n = 6$, $\theta = \frac{3\pi}{4} + 2 \times \frac{2\pi}{6} = \frac{17\pi}{12}$.

GRUPO II

1.1 Como $|-1 + \sqrt{3}\,i| = \sqrt{1+3} = 2$ e um argumento θ de $-1 + \sqrt{3}\,i$ é $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ $\left(\text{pois } tg\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \text{ e } \theta \in 2.^\text{o}\ \text{Q}\right)$,

vem que $-1 + \sqrt{3}\,i = 2cis\,\frac{2\pi}{3}$.

$1 - i = \sqrt{2}\,cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$$\therefore\ z_1 = \frac{\left(2cis\,\frac{2\pi}{3}\right)^3}{\sqrt{2}\,cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2^3\,cis\left(3 \times \frac{2\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\,cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{8}{\sqrt{2}}\,cis\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{8}{\sqrt{2}}\,cis\,\frac{\pi}{4}$$

Atendendo que $(z_2)^2 = cis\,(2\alpha)$, tem-se que $z_1 \times (z_2)^2 = \frac{8}{\sqrt{2}}\,cis\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)$

Para que $z_1 \times (z_2)^2$ seja uma imaginário puro:

$\frac{\pi}{4} + 2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k,\ k \in \mathbb{Z}$

Dado que $\alpha \in [0, \pi[$, obtém-se, para $k = 0$ e para $k = 1$, $\boxed{\frac{\pi}{8} \text{ e } \frac{5\pi}{8}}$

1.2 1.º processo:

Atendendo que, para qualquer complexo w, $|w|^2 = w \times \overline{w}$, tem-se:

$|1 + z|^2 + |1 - z|^2 \leq 10 \Leftrightarrow (1 + z)\,\overline{(1 + z)} + (1 - z)\,\overline{(1 - z)} \leq 10 \Leftrightarrow (1 + z)\,(1 + \overline{z}) + (1 - z)\,(1 - \overline{z}) \leq 10$

$\Leftrightarrow 1 \cancel{+ \overline{z}} \cancel{+ z} + z\overline{z} + 1 \cancel{- \overline{z}} \cancel{- z} + z\overline{z} \leq 10 \Leftrightarrow 2 + 2\,|z|^2 \leq 10 \Leftrightarrow |z|^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq |z| \leq 2 \Leftrightarrow |z| \leq 2$

c.q.d. (pois $|z| \geq 0$)

2.º processo:

Seja z um complexo tal que $z = x + yi$:

$\therefore\ |1 + z|^2 + |1 - z|^2 \leq 10 \Leftrightarrow |1 + x + yi|^2 + |1 - x - yi|^2 \leq 10 \Leftrightarrow \left(\sqrt{(1 + x)^2 + y^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(1 - x)^2 + y^2}\right)^2 \leq 10$

$\Leftrightarrow (1 + x)^2 + y^2 + (1 - x)^2 + y^2 \leq 10 \Leftrightarrow 1 \cancel{+ 2x} + x^2 + y^2 + 1 \cancel{- 2x} + x^2 + y^2 \leq 10 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 \leq 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$

$\Leftrightarrow |z|^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq |z| \leq 2 \Leftrightarrow |z| \leq 2$ c.q.d. (pois $|z| \geq 0$)

2.1 1.º processo:

P («As 3 bolas retiradas não terem todas a mesma cor») = 1 – P («As 3 bolas retiradas terem todas a mesma cor»)

= 1 – P («As 3 bolas retiradas serem todas pretas») $= 1 - \frac{{}^6C_3}{{}^9C_3} = \boxed{\frac{16}{21}}$

2.º processo:

P («Haver 2 bolas pretas e 1 branca ou haver 2 bolas pretas e 1 amarela ou haver 1 bola preta e 2 brancas ou haver 1 bola preta e 1 branca e 1 amarela ou haver 2 brancas e 1 amarela») =

$$\frac{{}^6C_2 \times {}^2C_1 + {}^6C_2 \times 1 + {}^6C_1 \times {}^2C_2 + {}^6C_1 \times {}^2C_1 \times 1 + {}^2C_2 \times 1}{{}^9C_3} = \boxed{\frac{16}{21}}$$

2.2 A 1.ª bola preta pode sair à 1.ª tentativa ou à 2.ª ou à 3.ª ou à 4.ª, pelo que os valores de X são 1, 2, 3 e 4.

$P(X = 1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

A 1.ª bola a sair é preta

$P(X = 2) = \frac{3}{9} \times \frac{6}{8} = \frac{1}{4}$

A 1.ª bola a sair não é preta e a 2.ª é preta

$P(X = 3) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{6}{7} = \frac{1}{14}$

As duas primeiras bolas não são pretas e a 3.ª é preta

$P(X = 4) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{1}{7} \times 1 = \frac{1}{84}$

As 3 primeiras bolas não são pretas e a 4.ª é preta

∴ a tabela de distribuição pedida é:

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{84}$

3. $P(A \mid B)$ designa a probabilidade de o número registado no primeiro lançamento ser negativo, sabendo que o produto dos números registados nos dois lançamentos é positivo.
Dado que o produto desses números é positivo, podem sair dois números positivos ou dois números negativos, pelo que o número de casos possíveis é igual $3^2 + 1^2 = 10$.

Se no 1.º lançamento saiu um número negativo (neste caso, o –1), o número de casos favoráveis é 1, pois só pode sair outra vez o –1.

Assim, de acordo com a regra de Laplace, a probabilidade pedida é igual a $\boxed{\frac{1}{10}}$

4. $\cos \alpha = \cos (\overrightarrow{HA} \,\hat{}\, \overrightarrow{HC}) = \frac{\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC}}{\|\overrightarrow{HA}\| \times \|\overrightarrow{HC}\|}$

$\overrightarrow{HA} = (3, 0, 0) - (3, -2, 3) = (0, 2, -3)$
$\overrightarrow{HC} = (0, -3, 0) - (3, -2, 3) = (-3, -1, -3)$

$\therefore \cos \alpha = \frac{0 - 2 + 9}{\sqrt{4 + 9} \times \sqrt{9 + 1 + 9}} = \frac{7}{\sqrt{247}} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{49}{247}$

Como $sen^2\, \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, tem-se que $sen^2\, \alpha = 1 - \frac{49}{247} = \boxed{\frac{198}{247}}$

5.1 f é contínua em $x = 4$ se $\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^+} f(x) = f(4)$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4} \frac{e^{x-4} - 3x + 11}{4 - x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 4} \frac{e^{x-4} - 1}{-(x-4)} + \lim_{x \to 4} \frac{12 - 3x}{4 - x} = -\lim_{x - 4 \to 0} \frac{e^{x-4} - 1}{x - 4} + \lim_{x \to 4} \frac{3\cancel{(4 - x)}}{\cancel{4 - x}} = -1 + 3 = 2$$

Limite notável:

$$\lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4} \ln (2e^x - e^4) = \ln (e^4) = 4 \neq \lim_{x \to 4^-} f(x)$

∴ <u>f não é contínua em $x = 4$</u>

5.2 Se $y = x + b$ é a equação da assíntota do gráfico de f quando $x \to +\infty$, então $m = 1$.

$$\therefore b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} (\ln (2e^x - e^4) - \ln (e^x)) = \lim_{x \to +\infty} \left(\ln \frac{2e^x - e^4}{e^x}\right) = \ln \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{2e^x - e^4}{e^x}\right) = \ln \left(\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}} - \frac{e^4}{e^x}\right)\right)$$

$$= \ln \left(2 - \frac{e^4}{+\infty}\right) = \ln (2 - 0) = \boxed{\ln 2}$$

6.1

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2x-\pi} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2}\times\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\times f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\text{sen}\,\pi\right) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

6.2 $f''(x) = 1 - 2\cos(2x)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2}$

$\left(x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[\Leftrightarrow 2x \in \left]-\pi, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} \vee 2x = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{6}$

	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
f''	+	0	–	0	+
f	∪	P.I.	∩	P.I.	∪

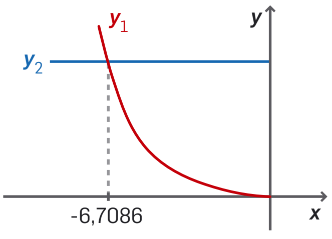
$\therefore$ o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right]$ e em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$. Além disso, o gráfico de f tem dois pontos de inflexão, de abcissas $-\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{6}$.

7. A área do $\triangle[ABC]$ é dada por $\frac{\overline{AC}\times\overline{BC}}{2}$

Seja x a abcissa positiva de B. Como se pretende a abcissa negativa, logo $\overline{BC} = -x$ e $\overline{AC} = 2 + f(x) = 2 - \ln(x + e^2)$

Assim, a equação a resolver é $\frac{-x(2-\ln(x+e^2))}{2} = 8 \Leftrightarrow -x(2-\ln(x+e^2)) = 16$

Sendo $y_1 = -x(2-\ln(x+e^2))$ e $y_2 = 16$, vejamos a interseção entre y_1 e y_2 em $[-10, 0]\times[0, 20]$:



$\therefore$ o valor pedido é $\boxed{-6{,}71}$

Fim