Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 635) – 2ª FASE – 18 DE JUNHO 2013

Grupo I

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	B	C	A	D	B	A	C	A
Versão 2	A	D	B	B	C	A	D	C

Grupo II

1.

1.1.

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} + i^{22} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \left(i^4\right)^5 \times i^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right),$$ porque $|z_1| = 1$

e um argumento de z_1 é $\dfrac{2\pi}{3}$.

$$z_2 = \frac{-2}{iz_1} = \frac{2\operatorname{cis}(\pi)}{\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{2\operatorname{cis}(\pi)}{\operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right)} = 2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\left(z_2\right)^n = \left[2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]^n = 2^n \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6} \times n\right)$$

$\left(z_2\right)^n$ é um número real negativo quando $-\dfrac{\pi}{6} \times n = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = -6 - 12k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Fazendo concretizações de *k*, obtemos $n = 6$ para $k = -1$, sendo este o menor valor natural de *n* tal que $\left(z_2\right)^n$ é um número real negativo.

1.2.

$$\frac{\cos(\pi-\alpha)+i\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\cos(\pi-\alpha)+i\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha}$$
$$=\frac{\cos(\pi-\alpha)+i\operatorname{sen}(\pi-\alpha)}{\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha}$$
$$=\frac{\operatorname{cis}(\pi-\alpha)}{\operatorname{cis}\alpha}$$
$$=\operatorname{cis}(\pi-2\alpha)$$

E assim se concluiu o pretendido.

2.

Como $B:\text{"}Sair\ número\ menor\ do\ que\ 3\text{"}$ então $\overline{B}:\text{"}Sair\ número\ 3\text{"}$.

Sabe-se que $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)-P(A\cap B)=\frac{5}{9}$, então

$$P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)-P(A\cap B)=\frac{5}{9}\Leftrightarrow P\left(\overline{A\cap B}\right)-P(A\cap B)=\frac{5}{9}$$
$$\Leftrightarrow 1-P(A\cap B)-P(A\cap B)=\frac{5}{9}$$
$$\Leftrightarrow 1-2P(A\cap B)=\frac{5}{9}$$
$$\Leftrightarrow -2P(A\cap B)=\frac{5}{9}-1$$
$$\Leftrightarrow -2P(A\cap B)=-\frac{4}{9}$$
$$\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{2}{9}$$

e que $P(B|A)=\frac{2}{7}$, então

$$P(B|A)=\frac{2}{7}\Leftrightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{2}{7}$$
$$\Leftrightarrow P(A)=\frac{P(A\cap B)}{\frac{2}{7}}.$$

Dado que $P(A\cap B)=\frac{2}{9}$, temos:

$$P(A)=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{7}} \Leftrightarrow P(A)=\frac{7}{9}.$$

Uma vez que, $A=\{1,3\}$ e como $A\cap B=\{1\}$ e $\overline{B}=\{3\}$ são dois acontecimentos incompatíveis, então

$P(A)=P(A\cap B)+P(\overline{B})$ pelo que,

$$P(\overline{B})=P(A)-P(A\cap B) \Leftrightarrow P(\overline{B})=\frac{7}{9}-\frac{2}{9}$$
$$\Leftrightarrow P(\overline{B})=\frac{5}{9}$$

Assim, conclui-se que a probabilidade de sair número 3 é $\frac{5}{9}$.

3.

3.1.

Do enunciado retiramos que a probabilidade de escolher, ao acaso, um jornalista e ele ser do sexo feminino é $\frac{3}{5}$. Como existem 20 jornalistas então, o número jornalistas do sexo feminino é dado por $\frac{3}{5}\times 20=12$, sendo os restantes 8 do sexo masculino.

Os valores da variável Y são: 0, 1 e 2.

Assim, a tabela de distribuição da variável Y é:

y_i	0	1	2
$P(Y=y_i)$	$\frac{{}^{8}C_2}{{}^{20}C_2}=\frac{14}{95}$	$\frac{{}^{8}C_1\times {}^{12}C_1}{{}^{20}C_2}=\frac{48}{95}$	$\frac{{}^{12}C_2}{{}^{20}C_2}=\frac{33}{95}$

3.2.

Pretende-se determinar o número de maneiras diferentes dos 20 jornalistas se sentarem nas três primeiras filas, ocupando completamente a 1ª e a 2ª filas.

Resposta I): $\left[{}^{20}C_{16}\times 16!\ \times {}^{8}A_4\right]$

Existem ${}^{20}C_{16}$ maneiras diferentes de formar grupos de 16 jornalistas, de entre os 20, para ocuparem as duas primeiras filas. Para cada grupo de 16 jornalistas existem $16!$ maneiras de ocuparem os 16 lugares nas duas primeiras filas. Restam 4 jornalistas que têm disponíveis 8 cadeiras na 3ª fila. Há ${}^{8}A_4$ maneiras diferentes dos restantes 4 jornalistas se sentarem, ordenadamente, em 4 cadeiras de entre as 8 disponíveis.

Existem, assim, ao todo, ${}^{20}C_{16} \times 16! \times {}^{8}A_4$ formas diferentes dos 20 jornalistas se sentarem, nas três primeiras filas, nas condições do enunciado.

Resposta II): $\left[{}^{20}A_8 \times {}^{12}A_8 \times {}^{8}A_4 \right]$

Existem ${}^{20}A_8$ maneiras diferentes de se sentarem, ordenadamente, 8 jornalistas escolhidos entre os 20, na primeira fila. Sentados 8 jornalistas, restam 12, sendo que 8 destes deverão ocupar completamente a 2ª fila. Existem ${}^{12}A_8$ formas diferentes dos 8 jornalistas, escolhidos de entre os 12, ocuparem as 8 cadeiras da 2ª fila. Ocupadas as duas primeiras filas, restam 4 jornalistas para os quais há ${}^{8}A_4$ formas diferentes de se sentarem ordenadamente em 4 cadeiras das 8 que constituem a 3ª fila.

Existem, assim, ao todo, ${}^{20}A_8 \times {}^{12}A_8 \times {}^{8}A_4$ formas diferentes dos 20 jornalistas se sentarem, nas três primeiras filas, de acordo com o enunciado.

4.

4.1.

A função *f* é contínua em $x = 1$ se e só se $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$.

Comecemos por calcular os limites laterais:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(xe^{3+x} + 2x \right) = e^4 + 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1 - \sqrt{x} + \operatorname{sen}(x-1)}{1-x}.$$

Atendendo a que o limite da soma é igual à soma dos limites das parcelas, quando estes existem, averiguemos se estes existem:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1^+} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} &= \lim_{x \to 1^+} \frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{(1-x)\left(1+\sqrt{x}\right)} \\
&= \lim_{x \to 1^+} \frac{1-x}{(1-x)\left(1+\sqrt{x}\right)} \\
&= \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}=-\lim_{x\to 1^+}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}.$$

Considerando $y=x-1$, quando $x\to 1^+$ então $y\to 0^+$ e assim,

$$-\lim_{x\to 1^+}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}=-\lim_{x\to 1^+}\frac{\operatorname{sen} y}{y}=-1$$

Como os limites das parcelas existem, então,

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1-\sqrt{x}+\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}+\lim_{x\to 1^+}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}.$$

Donde concluímos que *f* não é contínua em $x=1$ porque os limites laterais são diferentes.

4.2.

O gráfico de *f* admite uma assíntota de equação $y=mx+b$, quando $x\to-\infty$, se existirem m e b finitos.

$$\begin{aligned}
m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}&=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^{3+x}+2x}{x}\\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(e^{3+x}+2\right)}{x}\\
&=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{3+x}+2\right)\\
&=2,\text{ porque } \lim_{x\to-\infty}e^{3+x}=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-2x\right]&=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{3+x}+2x-2x\right)\\
&=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{3+x}\right)\\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^3}{\frac{e^{-x}}{x}}\text{,fazendo } y=-x,\text{ vem } y\to+\infty \text{ quando } x\to-\infty\\
&=\lim_{y\to+\infty}\frac{e^3}{\frac{-e^{y}}{y}}\\
&=0,\text{ dado que } \lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y}=+\infty.
\end{aligned}$$

O gráfico de *f* admite uma assíntota oblíqua de equação $y=2x$, quando $x\to-\infty$.

5.

Para efetuar o estudo das concavidades do gráfico de g determinemos a expressão analítica da segunda derivada de g.

$$g''(x)=\left(\ln\left(e^x+6e^{-x}+4x\right)\right)'$$
$$=\frac{\left(e^x+6e^{-x}+4x\right)'}{e^x+6e^{-x}+4x}$$
$$=\frac{e^x-6e^{-x}+4}{e^x+6e^{-x}+4x}$$

Como $x\in\mathbb{R}^+$ então, $e^x+6e^{-x}+4x>0$

Calculem-se os zeros da segunda derivada de g:

$$\begin{aligned} g''(x)=0 &\Leftrightarrow e^x-6e^{-x}+4=0 \\ &\Leftrightarrow e^{2x}+4e^x-6=0 \\ &\Leftrightarrow e^x=\frac{-4\pm\sqrt{16-4\times1\times(-6)}}{2} \\ &\Leftrightarrow e^x=\frac{-4\pm\sqrt{40}}{2} \\ &\Leftrightarrow \underbrace{e^x=-2-\sqrt{10}}_{impossível} \vee e^x=-2+\sqrt{10} \\ &\Leftrightarrow e^x=-2+\sqrt{10} \\ &\Leftrightarrow x=\ln\left(-2+\sqrt{10}\right) \end{aligned}$$

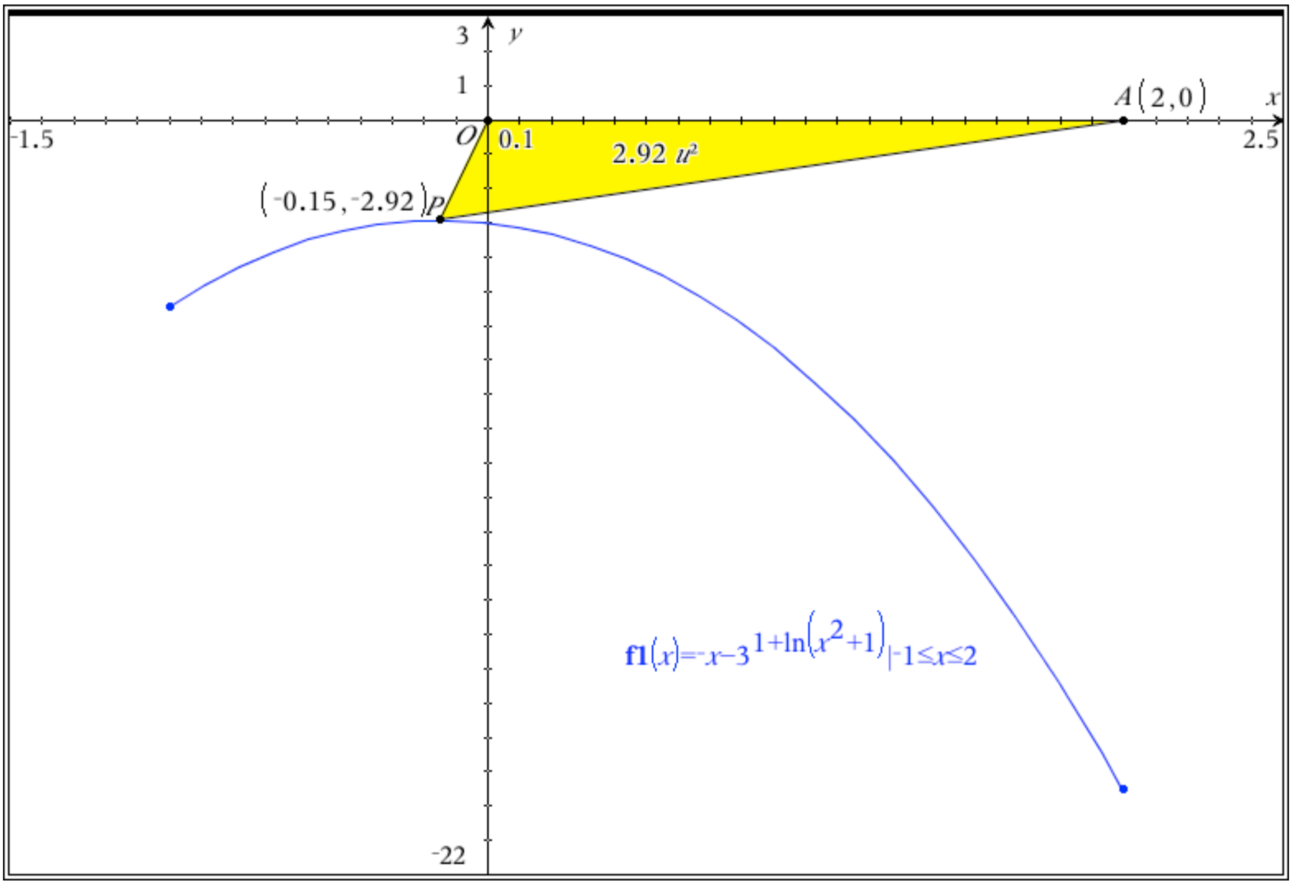
x	0		$\ln\left(-2+\sqrt{10}\right)$	$+\infty$
$g''(x)$	n.d.	$-$	0	$+$
$g(x)$	n.d.	$\cap$	P.I.	$\cup$

Por observação da tabela, conclui-se que o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left]0,\ln\left(-2+\sqrt{10}\right)\right]$ e voltada para cima em $\left[\ln\left(-2+\sqrt{10}\right),+\infty\right[$.

O gráfico de f tem um ponto de inflexão de abcissa $\ln\left(-2+\sqrt{10}\right)$.

6.

Consideremos a representação gráfica de *f* definida por $f(x) = -x - 3^{1+\ln(x^2+1)}$ no intervalo $[-1,2]$.



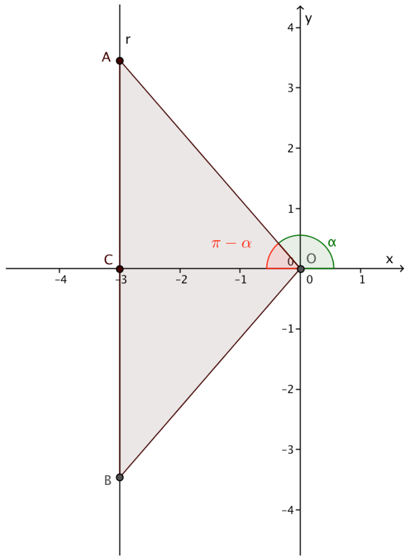
A área do triângulo $[AOP]$ é mínima quando a altura do triângulo, relativamente à base $[OA]$, for mínima, o que acontece quando a ordenada do ponto *P* for o máximo de *f*, no intervalo $[-1,2]$.

Por observação do gráfico de *f*, sabemos que o seu máximo é -2.92

Assim, porque a área do triângulo $[AOP]$ é dada por $A_{[AOP]} = \frac{\overline{OA} \times |f(x)|}{2} = \frac{2 \times |f(x)|}{2} = |f(x)|$ a área mínima é 2.92

7.

7.1.



Tendo em conta os dados da figura tem-se que,

$$P_{[OAB]} = 2\overline{OA} + \overline{AB}$$

Determine-se $\overline{OA}$,

$$\cos(\pi-\alpha) = \frac{3}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{3}{\cos(\pi-\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{3}{-\cos(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \overline{OA} = -\frac{3}{\cos(\alpha)}$$

e $\overline{AC}$,

$$tg(\pi-\alpha) = \frac{\overline{AC}}{3} \Leftrightarrow \overline{AC} = 3tg(\pi-\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = -3tg(\alpha)$$

Pelo que, $\overline{AB} = 2\times(-3tg(\alpha)) = -6tg(\alpha)$.

Assim,

$$P_{[OAB]} = \overline{AB} + 2\overline{OA} =$$

$$= -6tg(\alpha) + 2\times\left(-\frac{3}{\cos(\alpha)}\right) =$$

$$= -6tg(\alpha) - \frac{6}{\cos(\alpha)}$$

Então, $P(\alpha) = -6\,\mathrm{tg}(\alpha) - \dfrac{6}{\cos(\alpha)}$, $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$.

7.2.

O declive da reta tangente ao gráfico da função *P* é igual à derivada da função *P* no ponto de abcissa $\frac{5\pi}{6}$.

Assim, determine-se a derivada da função *P*,

$$P'(x)=\left(-6tg(x)-\frac{6}{\cos(x)}\right)'$$
$$=(-6tg(x))'-\left(\frac{6}{\cos(x)}\right)'$$
$$=-6\times\frac{1}{\cos^2(x)}-\left(\frac{-6\times(\cos(x))'}{\cos^2(x)}\right)$$
$$=-6\times\frac{1}{\cos^2(x)}-\left(\frac{+6\times sen(x)}{\cos^2(x)}\right)$$
$$=\frac{-6-6sen(x)}{\cos^2(x)}$$

Logo,

$$P'\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{-6-6sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{\cos^2\left(\frac{5\pi}{6}\right)}=\frac{-6-6\times\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{-9}{\frac{3}{4}}=-12$$

Pelo que se conclui que o declive da reta tangente ao gráfico da função *P*, no ponto de abcissa $\frac{5\pi}{6}$, é -12.

FIM