Grupo I

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Versão 1	B	D	C	B	A	C	A	C
Versão 2	C	B	D	B	C	A	D	A

Grupo II

1.1.

$$z^3+z_1=z_2 \Leftrightarrow z^3=6+11\,i-(-2+11\,i) \Leftrightarrow z^3=8 \Leftrightarrow z=\sqrt[3]{8\,cis\,0} \Leftrightarrow z=2\,cis\left(\frac{2k\pi}{3}\right), k\in Z \quad .$$

As 3 raízes distintas são:

$z_1=2\ cis\,0\ ,\ z_2=2\ cis\left(\frac{2}{3}\pi\right)\ ,\ z_3=2\ cis\left(\frac{4}{3}\pi\right)$

Cálculo auxiliar 1

$$(-2+i)^3=(-2+i)^2(-2+i)=(4-4i-1)(-2+i)=(3-4i)(-2+i)=-6+3i+8i+4=-2+11i$$

Cálculo auxiliar 2

$$\frac{1+28i}{2+i}=\frac{(1+28i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{2-i+56i+28}{2^2+1^2}=\frac{30+55i}{5}=6+11i$$

1.2. $w\neq 0$

Se w e $\frac{1}{w}$ são raízes de índice n de um mesmo número complexo z, então

$$z=w^n=\left(\frac{1}{w}\right)^n$$

e assim vem que $w^n=\left(\frac{1}{w}\right)^n \Leftrightarrow w^{2n}=1 \Leftrightarrow \left(w^n\right)^2=1 \Leftrightarrow w^n=-1\ \vee w^n=1 \Leftrightarrow z=-1 \vee z=1$

2) F: " ser rapariga"

P: " ter excesso de peso"

$P(F)=0,55 \Rightarrow P(\overline{F})=1-0,55=0,45$

$P(\overline{P}|\overline{F})=0,4 \Rightarrow P(P|\overline{F})=1-0,4=0,6$

$$P(P)=P(P|F)P(F)+P(P|\overline{F})P(\overline{F})=0,55\times 0,3+0,6\times 0,45=0,435.$$

2.1)

$$P(\overline{F}|P)=\frac{P(\overline{F}\cap P)}{P(P)}=\frac{P(\overline{F})\times P(P|\overline{F})}{P(P)}=\frac{0,45\times 0,6}{0,435}=\frac{18}{29}\ .$$

2.2)

Como são 200 alunos temos 110 raparigas (0,55x200) e 90 rapazes.

$$P(\text{serem escolhidos duas raparigas e um rapaz}) = \frac{{}^{110}C_2 \times 90}{{}^{200}C_3} \approx 0,41$$

3. Como se vão extrair, em simultâneo, 4 bolas do saco então só poderão acontecer duas situações: extrairmos a bola com o número 0 com outras 3 bolas ou extrairmos 4 bolas com números diferentes de zero. Assim, na primeira situação, o produto dos números inscritos nas bolas extraídas é zero e, na segunda situação, o produto é quatro pelo que a variável X só poderá assumir os valores 0 e 4, respetivamente.

A probabilidade de X tomar o valor 0 é dada por $\frac{{}^4C_3}{{}^5C_4} = \frac{4}{5}$

- número de casos possíveis: das 5 bolas escolher 4: ${}^5C_4$
- número de casos favoráveis: das 4 bolas com números diferentes de zero escolher 3 e escolher a bola com o número zero.

A probabilidade de X assumir o valor 4 é dada por: $\frac{{}^4C_4}{{}^5C_4} = \frac{1}{5}$

n.º de casos possíveis : (já foi explicado)

n.º de casos favoráveis: das 4 bolas com números diferentes de zero escolho os 4.

4.

4.1.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow e^x-(4e^{-x}+4)=0 \Leftrightarrow e^x-\frac{4}{e^x}-4=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}-4e^x-4=0 \Leftrightarrow (e^x)^2-4e^x-4=0 \Leftrightarrow$$

$$(e^x>0, \forall x \in IR) \quad (y=e^x)$$

$$\Leftrightarrow y^2-4y-4=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{4-\sqrt{32}}{2} \vee y=\frac{4+\sqrt{32}}{2} \Leftrightarrow$$

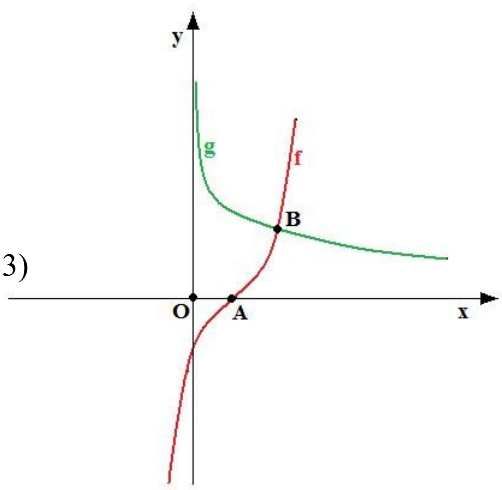
$$\Leftrightarrow y=2-2\sqrt{2} \vee y=2+2\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x=2-2\sqrt{2} \vee e^x=2+2\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$c.\ impossível,\ pois\ \ e^x>0, \forall x \in IR\ \ e\ \ 2-2\sqrt{2}<0$$

$$\Leftrightarrow x=\ln(2+2\sqrt{2})$$

$$\therefore\ \ln(2+2\sqrt{2})\ \textit{é o único zero de } f.$$



4.2) Abcissa do ponto A: $\ln(2+2\sqrt{2}) \approx 1,57$ B(3,22; 2,83)

Altura do Triângulo $\approx 2,83$; Base do Triângulo $\approx 1,57$

$$A_{[OAB]} \approx \frac{1,57 \times 2,83}{2} \approx 2,2$$

5.

5.1. $m=\lim_{x\to-\infty}\frac{x e^{1-x}}{x}=e^{+\infty}=+\infty\notin\mathbb{R}$

Logo o gráfico não tem Assimptotas não verticais quando $x\to-\infty$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln(x+1)-x\ln(x)+3x}{x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}(\ln(x+1)-\ln(x))+3$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]+3=\ln 1+3=0+3=3$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[(x\ln(x+1)-x\ln(x)+3x-3x)\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[(x\ln(x+1)-x\ln(x))\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$
$$=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)$$
$$=\left(\lim_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{y}\right)=1$$

onde se fez a mudança de variável $y=\frac{1}{x}$ e se reconheceu um limite notável.

Conclusão: $y=3x+1$ é a equação da Assimptota oblíqua do gráfico de f quando $x\to+\infty$

5.2. $f'(x)=(xe^{1-x})'=e^{1-x}+(-xe^{1-x})=e^{1-x}(1-x), \forall\ x<0$

$f'(-1)=2e^2\ ;\ f(-1)=-e^2$

$y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = 2e^2(x+1) - e^2$
$\Leftrightarrow y = 2e^2 x + e^2$ é a equação pretendida.

6.1.

$$P(\alpha) = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} =$$
$$= 1 - \frac{\cos\alpha}{sen\,\alpha} + 1 + 1 + \frac{1}{sen\,\alpha} =$$
$$= 3 + \frac{1-\cos\alpha}{sen\,\alpha},\ \forall\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$$

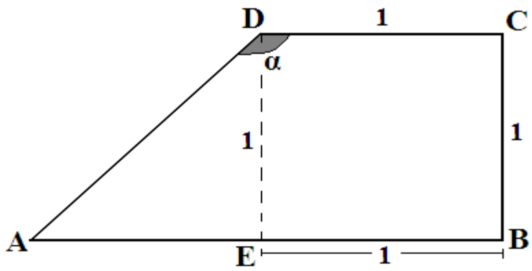


Figura 5

A amplitude, em radianos, do ângulo BAD é

$$2\pi - (\alpha + \pi) = \pi - \alpha,\ \alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$$

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = sen(\pi - \alpha) \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{1}{sen\,\alpha},\ \alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$$

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = tg(\pi - \alpha) \Leftrightarrow \overline{AE} = \frac{1}{-tg\,\alpha},\ \alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$$

Conclusão: $\overline{AB} = -\dfrac{1}{tg\,\alpha} + 1 = 1 - \dfrac{\cos\alpha}{sen\,\alpha},\ \alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$

6.2) $\tan\theta = -\sqrt{8},\ \dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$$P'(\alpha) = \frac{(1-\cos\alpha)'\,sen\,\alpha - (sen\,\alpha)'(1-\cos\alpha)}{sen^2\,\alpha} = \frac{sen^2\alpha - \cos\alpha + \cos^2\alpha}{sen^2\,\alpha} =$$
$$= \frac{1-\cos\alpha}{sen^2\,\alpha},\ \forall\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$$

$$P'(\theta) = \frac{(1-\cos\theta)}{sen^2\,\theta} = \frac{1+\frac{1}{3}}{\left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)^2} = \frac{3}{2}$$

C.A.:

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + tg^2\theta \Leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos\theta = -\frac{1}{3}$$
$(\theta \in 2ºQ\ \ assim\ \ \cos\theta < 0)$
$$sen\,\theta = \cos\theta \times tg\,\theta = \frac{\sqrt{8}}{3}$$