

# Prova Escrita de MATEMÁTICA A - 12º Ano

## 2011 - Época especial

Proposta de resolução

---

### GRUPO I

---

1. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um jovem inscrito no clube, e os acontecimentos:

$A$ : «O jovem pratica andebol»

$F$ : «O jovem pratica futebol»

Sabemos que existem 28 jogadores que jogam apenas futebol e 12 que jogam futebol e andebol, ou seja, o número total de praticantes de futebol é de  $28 + 12 = 40$

De entre estes, apenas 12 jogam andebol, pelo que a probabilidade de selecionar ao acaso um jovem inscrito, de entre os praticantes de futebol, e ele também jogar andebol é

$$P(A|F) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$$

Resposta: **Opção B**

2. Usando o modelo binomial ( $P(X = k) = {}^n C_k p^k q^{n-k}$ ), temos que  $n = 5$ .

Para o acontecimento  $I$ ,  $p = q = \frac{1}{2}$  e  $k = 2$ .

Para o acontecimento  $J$ ,  $p = \frac{1}{6}$ , pelo que  $q = \frac{5}{6}$  e  $k = 2$ .

Assim, temos que:

- $P(I) = P(X = 2) = {}^5 C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{2^5} = \frac{5}{16} \approx 0,31$
- $P(\bar{I}) = 1 - P(I) = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16} \approx 0,69$
- $P(J) = P(Y = 2) = {}^5 C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 10 \left(\frac{5^3}{6^5}\right) \approx 0,16$
- $P(\bar{J}) = 1 - P(J) = 1 - \frac{10 \times 5^3}{6^5} \approx 0,84$

Logo o acontecimento mais provável é o acontecimento  $\bar{J}$ .

Resposta: **Opção D**

3. Como  $A$  e  $B$  são acontecimentos incompatíveis, temos que  $A \cap B = \emptyset$ , ou seja,  $P(A \cap B) = 0$

Pelas leis de De Morgan temos que  $P(\overline{A \cap B}) = 0,3 \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0,3$ , e assim

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0,3 = 0,7$$

Como  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = P(B)$ , calculamos o valor de  $P(B)$ , substituindo os valores conhecidos:

$$P(B) = 0,7 + 0 - 0,5 = 0,2$$

Resposta: **Opção A**



4. • Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  então a reta de equação  $y = 1$  é assíntota do gráfico de  $f$
- Como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-2x)) = 0$  então a reta de equação  $y = -2x + 0$  é assíntota do gráfico de  $f$

Logo as assíntotas do gráfico de  $f$  são definidas por  $y = 1$  e  $y = -2x$

Resposta: **Opção C**

5. Determinando a expressão da primeira, e depois da segunda derivada, temos:

$$f'(x) = (ax^2 - 1)' = 2ax + 0 = 2ax$$

$$f''(x) = (f'(x))' = (2ax)' = 2a$$

Como o gráfico de  $f''$  é a reta de equação  $y = 2a$ , e pela observação do gráfico, podemos constatar que  $2a < 0$ , logo  $a < 0$ .

Assim, das opções apresentadas, apenas o valor  $-3$  é compatível com a condição  $a < 0$ .

Resposta: **Opção D**

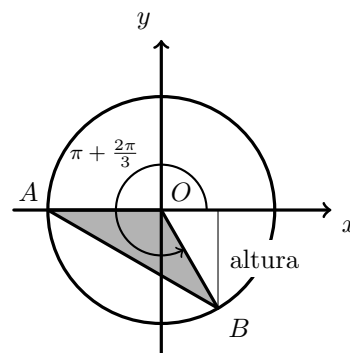
6. Como se trata de um círculo trigonométrico, o ponto  $B$  tem coordenadas  $B\left(\cos \frac{5\pi}{3}, \sin \frac{5\pi}{3}\right)$ , porque o segmento  $[OB]$ , define com o semieixo positivo  $Ox$  um ângulo de  $\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$  radianos.

Podemos considerar como a medida da base do triângulo  $\overline{OA} = 1$  e o valor absoluto da ordenada de  $B$  como a medida da altura:

$$|y_B| = \left| \sin \frac{5\pi}{3} \right| = \left| -\sin \frac{\pi}{3} \right| = \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Assim, calculando a área do triângulo vem:

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OA} \times |y_B|}{2} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



Resposta: **Opção A**

7. Para que  $z_1$  seja igual ao conjugado de  $z_2$ , tem que se verificar a condição  $\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2) \wedge \text{Im}(z_1) = -\text{Im}(z_2)$

Logo:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2) \\ \text{Im}(z_1) = -\text{Im}(z_2) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3k + 2 = 3p - 4 \\ p = -(2 - 5k) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k + 6 = 3p \\ p = 5k - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + 2 = p \\ k + 2 = 5k - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} k + 2 = p \\ 2 + 2 = 5k - k \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} k + 2 = p \\ 4 = 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2 = p \\ 1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = p \\ 1 = k \end{cases} \end{aligned}$$

Resposta: **Opção B**



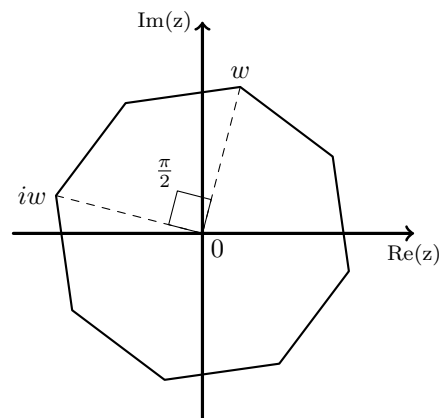
8. Sendo a imagem geométrica de  $w$  o vértice  $A$  do octógono, designemos por  $z$  a imagem geométrica do vértice  $C$  do octógono.

Como os dois números complexos são raízes de índice 8 de um mesmo número complexo, temos que  $|w| = |z|$ .

Como o octógono está centrado na origem, e tem oito lados, o ângulo  $AOB$  tem de amplitude  $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$  radianos. Como o ângulo  $BOC$  tem a mesma amplitude, temos que o ângulo  $AOC$  tem de amplitude  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$  radianos.

Ou seja  $\arg(z) = \arg(w) + \frac{\pi}{2}$ , e como  $|w| = |z|$  podemos afirmar que  $z = w \times i$

Resposta: **Opção C**



## GRUPO II

1.

- 1.1. Como  $i^{4n+2014} = i^{4n+4 \times 53+2} = i^{4(n+53)+2} = i^2 = -1$ , temos que  $z_1 = 2 + \sqrt{3}i + (-1) = 1 + \sqrt{3}i$

Escrevendo  $z_1$  na f.t. temos  $z_1 = \rho \operatorname{cis} \theta$ , onde:

- $\rho = |z_1| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$  como  $\operatorname{sen} \theta > 0$  e  $\operatorname{cos} \theta > 0$ ,  $\theta$  é um ângulo do 1º quadrante, logo  $\theta = \frac{\pi}{3}$

Assim  $z_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$ , e como  $\sqrt[3]{z} = z_1$ , recorrendo à fórmula de Moivre para a potência, temos que:

$$z = (z_1)^3 = \left(2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}\right)^3 = 2^3 \operatorname{cis} \left(3 \times \frac{\pi}{3}\right) = 8 \operatorname{cis} \pi = -8$$

- 1.2. **A opção (I) não representa a região** definida pela condição porque não satisfaz a condição  $\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq 2\pi$ .

Os números complexos que verificam esta condição têm as respetivas representações geométricas nos 2º, 3º e 4º quadrantes, ao contrário dos pontos assinalados na opção (I).

**A opção (II) não representa a região** definida pela condição porque não satisfaz a condição  $|z| \geq |z - z_2|$ .

Os números complexos que satisfazem esta condição têm as repetivas representações geométricas no semiplano delimitado pela bissetriz do segmento de reta  $[OC]$  e que contém o ponto  $C$ , ou seja os pontos cuja distância à origem é não inferior à distância ao ponto  $C$ . Os pontos assinalados na opção (II) estão mais perto da origem do que do ponto  $C$ .

**A opção (III) não representa a região** definida pela condição porque não satisfaz a condição  $|z - z_2| \leq 1$ .

Os números complexos que verificam esta condição têm as respetivas representações geométricas no interior da circunferência de raio 1 e centro em  $C$ , e alguns pontos assinalados na opção (III) estão no exterior desta circunferência (pertencem ao interior da circunferência com o mesmo raio, mas centrada na origem).

Logo **a opção correta é a opção (IV)**.



2. Temos que,

$$\begin{aligned}
 P(\overline{A \cap B} | B) &= \frac{P((\overline{A \cap B}) \cap B)}{P(B)} && \text{Definição: } P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} \\
 &= \frac{P((\overline{A} \cup \overline{B}) \cap B)}{P(B)} && \text{Leis de De Morgan: } \overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y} \\
 &= \frac{P((\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap B))}{P(B)} \\
 &= \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} && \overline{B} \cap B = \emptyset \text{ e } X \cup \emptyset = X \\
 &= P(\overline{A} | B) && \text{Definição: } P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}
 \end{aligned}$$

Logo, se  $P(B) \neq 0$  então  $P(\overline{A \cap B} | B) = P(\overline{A} | B)$  q.e.d.

3.

3.1. Se considerarmos o bloco das três cartas como um elemento único, temos um conjunto de 11 elementos (o bloco das 3 figuras e as restantes 10 cartas) para serem dispostos em 11 posições, ou seja,  ${}^{11}A_{11} = P_{11} = 11!$  disposições diferentes.

Por cada uma das disposições anteriores, temos que considerar, adicionalmente, as trocas possíveis das 3 figuras no bloco das 3 cartas, ou seja,  ${}^3A_3 = P_3 = 3!$  trocas possíveis.

Assim, o número de sequências diferentes que é possível construir, de modo que as três figuras fiquem juntas é

$$11! \times 3! = 239\,500\,800$$

3.2. Ao retirar 4 cartas de um conjunto de 13, podemos obter  ${}^{13}C_4$  conjuntos diferentes de 4 cartas (entendendo a extração simultânea, e por isso, considerando irrelevante a ordem), ou seja,  ${}^{13}C_4$  é o número de casos possíveis.

Como, obter pelo menos duas figuras, significa, obter 2 figuras ou obter 3 figuras, podemos calcular o número de casos favoráveis, como a soma dos números de casos relativos a duas situações distintas:

- Retirar 3 figuras e uma das outras cartas.  
Nesta situação, existem  ${}^3C_3 \times {}^{10}C_1 = 1 \times 10 = 10$  conjuntos diferentes.
- Retirar duas figuras e duas das outras cartas.  
Nesta situação, existem  ${}^3C_2 \times {}^{10}C_2$  conjuntos diferentes, correspondentes a selecionar as 2 figuras de entre as 3 existentes e 2 das restantes 10 cartas.

Assim, a probabilidade de, ao retirar, ao acaso, 4 das 13 cartas do naipe de copas, obter pelo menos duas figuras, é

$$\frac{10 + {}^3C_2 \times {}^{10}C_2}{{}^{13}C_4} = \frac{29}{143}$$



4. Como a máquina agrícola funcionou durante 20 minutos e, nesse período de tempo, consumiu 2 litros de combustível, logo a quantidade de combustível que existia no depósito no momento inicial era a quantidade medida ao fim de 20 minutos acrescida dos 2 litros consumidos, ou seja,

$$Q(0) = Q(20) + 2 \Leftrightarrow Q(0) - Q(20) = 2$$

Logo, determinando o valor de  $k$ , temos que

$$\begin{aligned} Q(0) - Q(20) = 2 &\Leftrightarrow 12 + \log_3(81 - k \times 0^2) - (12 + \log_3(81 - k \times 20^2)) = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 12 + \log_3(81 - 0) - 12 - \log_3(81 - 400k) = 2 \Leftrightarrow \log_3(81) - \log_3(81 - 400k) = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4 - \log_3(81 - 400k) = 2 \Leftrightarrow -\log_3(81 - 400k) = 2 - 4 \Leftrightarrow \log_3(81 - 400k) = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3^2 = 81 - 400k \Leftrightarrow 400k = 81 - 3^2 \Leftrightarrow k = \frac{72}{400} \Leftrightarrow k = \frac{9}{50} \end{aligned}$$

5.

- 5.1. Sabendo que  $f$  é contínua em  $x = -1$ , temos que  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$

Calculando  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  vem:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{x+1}{1-e^{x+1}} + 1 \right) = \frac{-1+1}{1-e^{-1+1}} + 1 = \frac{0}{0} + 1 \text{ (Indeterminação)}$$

(fazendo  $y = x + 1$ , temos que se  $x \rightarrow -1$ , então  $y \rightarrow 0$ )

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \left( \frac{x+1}{1-e^{x+1}} \right) + \lim_{x \rightarrow -1} 1 = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{y}{1-e^y} \right) + 1 = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\frac{1-e^y}{y}} \right) + 1 = \\ &= \frac{\lim_{y \rightarrow 0} 1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-(-1+e^y)}{y}} + 1 = \frac{1}{-\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y-1}{y}} + 1 = \frac{1}{-1} + 1 = -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Lim. Notável

Assim, como  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$  e  $f(-1) = a + 2$ , podemos determinar o valor de  $a$ :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$$



5.2. Começamos por determinar a expressão da derivada para  $x \neq -1$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{x+1}{1-e^{x+1}} + 1 \right)' = \left( \frac{x+1}{1-e^{x+1}} \right)' + (1)' = \frac{(x+1)'(1-e^{x+1}) - (x+1)(1-e^{x+1})'}{(1-e^{x+1})^2} + 0 = \\ &= \frac{1 \times (1-e^{x+1}) - (x+1)((1)' - (x+1)'e^{x+1})}{(1-e^{x+1})^2} = \frac{1-e^{x+1} - (x+1)(0-1 \times e^{x+1})}{(1-e^{x+1})^2} = \\ &= \frac{1-e^{x+1} - (x+1)(-e^{x+1})}{(1-e^{x+1})^2} = \frac{1-e^{x+1} - (-xe^{x+1} - e^{x+1})}{(1-e^{x+1})^2} = \\ &= \frac{1-e^{x+1} + xe^{x+1} + e^{x+1}}{(1-e^{x+1})^2} = \frac{1+xe^{x+1}}{(1-e^{x+1})^2} \end{aligned}$$

Como a função  $f'$  resulta de operações sucessivas de funções contínuas em  $\mathbb{R}$ , é uma função contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , e, por isso, também é contínua em  $[0, 1]$ .

Como  $\frac{1}{4} = 0,25$ , temos que  $0,21 < \frac{1}{4} < 0,34$ , ou seja,  $f'(1) < \frac{1}{4} < f'(0)$ , então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe  $c \in ]0, 1[$  tal que  $f'(c) = \frac{1}{4}$ , ou seja, que a equação  $f'(x) = \frac{1}{4}$  tem, pelo menos, uma solução em  $]0, 1[$ .

C.A.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{1+0 \times e^{0+1}}{(1-e^{0+1})^2} = \frac{1+0}{(1-e^1)^2} = \\ &= \frac{1}{(1-e)^2} \approx 0,34 \\ f'(1) &= \frac{1+1 \times e^{1+1}}{(1-e^{1+1})^2} = \frac{1+e^2}{(1-e^2)^2} = \\ &= \frac{1}{(1-e)^2} \approx 0,21 \end{aligned}$$

6.

6.1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{f(x) - \pi} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{\pi - 4 \text{sen}(5x) - \pi} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{-4 \text{sen}(5x)} = -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\text{sen } x}{x} \times \frac{x}{\text{sen}(5x)} \right) = \\ &= -\frac{1}{4} \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\text{sen}(5x)} = -\frac{1}{4} \times 1 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\text{sen}(5x)}{x}} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(5x)}{x}} = \end{aligned}$$

(fazendo  $y = 5x$  temos que  $x = \frac{y}{5}$ , e se  $x \rightarrow 0$ , então  $y \rightarrow 0$ )

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{4} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(y)}{\frac{y}{5}}} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{5 \text{sen}(y)}{y}} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{5 \text{sen}(y)}{y}} = \\ &= -\frac{1}{4} \times \frac{1}{5 \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(y)}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{5 \times 1} = -\frac{1}{20} \end{aligned}$$



- 6.2. Para estudar o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$g''(x) = (g'(x))' = \left( \log_2 \left( -\frac{\pi}{6} - x \right) \right)' = \frac{\left( -\frac{\pi}{6} - x \right)'}{\left( -\frac{\pi}{6} - x \right) \ln 2} = \frac{-\left( \frac{\pi}{6} \right)' - (x)'}{\left( -\frac{\pi}{6} - x \right) \ln 2} = \frac{-1}{\left( -\frac{\pi}{6} - x \right) \ln 2}$$

Assim temos que a equação  $g''(x) = 0$  é impossível, pelo que o gráfico da função  $g$  **não tem qualquer ponto de inflexão**.

Relativamente ao sentido das concavidades do gráficos, temos que, no intervalo em qua a função está definida,  $-\frac{\pi}{6} - x > 0$ , pelo que também  $\left( -\frac{\pi}{6} - x \right) \ln 2 > 0$

Assim, o quociente  $\frac{-1}{\left( -\frac{\pi}{6} - x \right) \ln 2}$  toma sempre valores negativos no domínio da função, isto é,

$g''(x) < 0, \forall x \in \left] -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3} \right[$ , ou seja, o gráfico de  $g$  **tem a concavidade voltada para cima** em todo o domínio.

7. Sabemos que o declive da reta tangente ao gráfico de  $h$ , no ponto  $A$ , é zero, porque a tangente é paralela ao eixo  $Ox$ .

Por outro lado o declive ( $m$ ) da reta tangente em qualquer ponto é

$m = h'(x)$ , e  $h'(x) = (f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$ , pelo que é necessário determinar a derivada de  $f$ :

$$f'(x) = (\pi - 4 \operatorname{sen}(5x))' = (\pi)' - (4 \operatorname{sen}(5x))' = 0 - 4 \times 5 \cos(5x) = -20 \cos(5x)$$

Assim, como  $m = h'(x)$  e  $m = 0$ , temos que a abcissa do ponto  $A$  é a solução da equação:

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - g'(x) = 0 \Leftrightarrow -20 \cos(5x) - \log_2 \left( -\frac{\pi}{6} - x \right) = 0$$

Logo, podemos traçar na calculadora o gráfico da função  $h'$ , numa janela compatível com o domínio (ou seja o domínio de  $g'$ ), que se reproduz na figura ao lado.

Recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados dos zeros de uma função, podemos determinar o valor (aproximado às décimas) do único zero da função, que coincide com a abcissa do ponto  $A$ :

$$x \approx -1,6$$

