Máximo Matemática A 10

Proposta de teste de avaliação

Matemática A

10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Porto Editora

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o conjunto de pontos definido pela condição:

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z=0$$

A condição define:

(A) uma circunferência de centro $(-2, 4)$ e raio 7.

(B) uma superfície esférica de centro $(-1, 2, -3)$ e raio 14.

(C) uma superfície esférica de centro $(1, -2, 3)$ e raio $\sqrt{14}$.

(D) o plano mediador do segmento de reta $[AB]$, sendo $A(1, 3, 4)$ e $B(2, -1, 3)$.

2. Qual das condições seguintes define, num referencial o.n. $Oxyz$, uma reta paralela ao eixo Ox?

(A) $x=1 \wedge y=3$

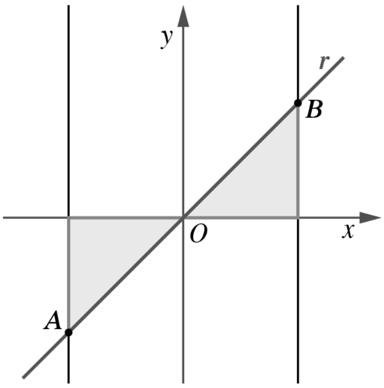
(B) $y=-3 \wedge z=0$

(C) $x=3$

(D) $x=1 \wedge y=2 \wedge z=3$

3. Na figura ao lado, estão representadas, num referencial O.n. xOy, duas retas verticais e a reta AB bissetriz dos quadrantes ímpares.

Os pontos A e B também pertencem às retas verticais e têm ordenadas iguais a -2 e 3, respetivamente.



3.1. Qual das condições seguintes define o domínio plano representado a sombreado, incluindo as fronteiras?

(A) $-2 \leq x \leq 3 \wedge [(y \leq x \wedge y \geq 0) \vee (y \geq x \wedge y \leq 0)]$

(B) $-2 \leq x \leq 3 \wedge [(y \geq x \wedge y \geq 0) \vee (y \leq x \wedge y \geq 0)]$

(C) $-2 \leq x \leq 3 \wedge y \geq x \wedge y \leq 0$

(D) $-2 \leq x \leq 3 \wedge [(y \leq x \wedge y \leq 0) \vee (y \geq x \wedge y \leq 0)]$

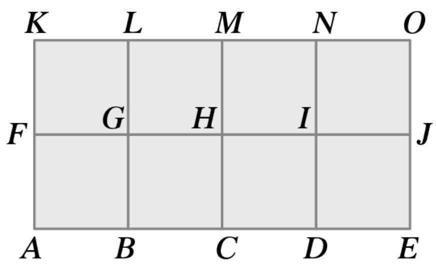
3.2. Qual é a distância entre os pontos A e B?

(A) $\sqrt{13}$ **(B)** $5\sqrt{2}$ **(C)** $\sqrt{2}$ **(D)** $2\sqrt{5}$

4. Na figura ao lado, o retângulo $[AEOK]$ está dividido em oito quadrados geometricamente iguais.

Podemos afirmar que $N+\overrightarrow{LD}-\overrightarrow{BE}$ é igual a:

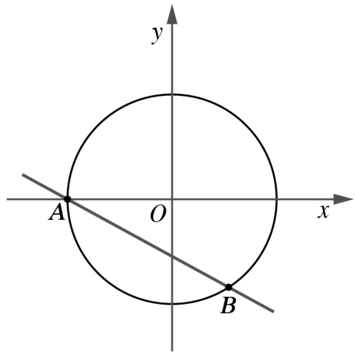
(A) B **(B)** C **(C)** N **(D)** M



Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

5. Na figura ao lado estão representadas, em referencial o.n. xOy, uma reta AB e uma circunferência com centro na origem do referencial.



Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem à circunferência;
- o ponto A pertence ao semieixo negativo Ox;
- uma equação vetorial da reta AB é $(x\ ,\ y)=(-4\ ,\ 0)+k(2\ ,\ -1),\ k\in\mathbb{R}$.

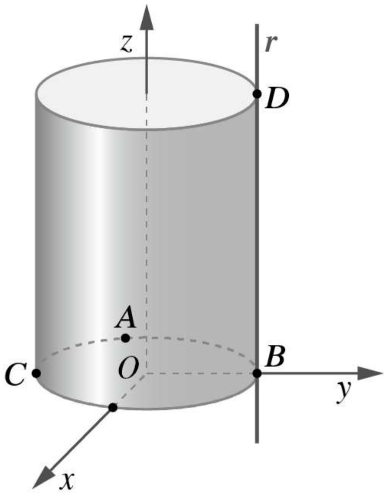
Determine as coordenadas do ponto B.

6. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere os vetores $\vec{u}(2\ ,\ -1\ ,\ m),\ m\in\mathbb{R}$ e $\vec{v}\left(-\frac{1}{3}\ ,\ n\ ,\ 2\right),\ n\in\mathbb{R}$.

6.1. Determine m e n de modo que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam colineares.

6.2. Admita que $m=-2$. Determine as coordenadas do(s) vetor(es) colinear(es) com $\vec{u}$ de norma 1.

7. Na figura ao lado está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cilindro.



Sabe-se que:

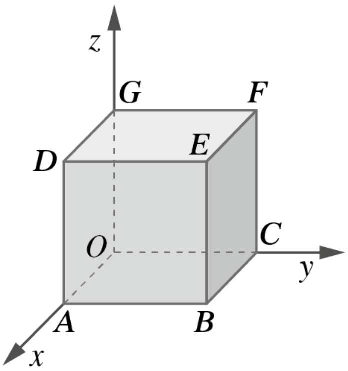
- a base inferior do cilindro é um círculo contido no plano xOy de diâmetro $[BC]$ e raio $[OA]$;
- o ponto B tem ordenada positiva, o ponto C tem ordenada negativa e ambos pertencem ao eixo Oy;
- o ponto A tem coordenadas $(-4,\ -3,\ 0)$;
- a reta r passa no ponto B e é paralela ao eixo Oz;
- o ponto D pertence à reta r e à circunferência que limita a base superior do cilindro.

7.1. Mostre que o ponto B tem coordenadas $(0,\ 5,\ 0)$ e o ponto C tem coordenadas $(0,\ -5,\ 0)$.

7.2. Escreva uma equação vetorial da reta r.

7.3. Sabendo que o volume do cilindro é igual a 200π, determine as coordenadas do ponto D.

8. Na figura ao lado está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[OABCDEFG]$.



Sabe-se que:

- o vértice O coincide com a origem do referencial;
- o vértice A pertence ao semieixo positivo Ox, o vértice C pertence ao semieixo positivo Oy e o vértice G pertence ao semieixo positivo Oz;
- a abcissa do ponto A é 2;
- os pontos A e D, B e E, C e F, e O e G pertencem a arestas do cubo paralelas ao eixo Oz.

8.1. Escreva uma condição que defina a reta EF.

8.2. Mostre que o raio da superfície esférica que contém os oito vértices do cubo é $\sqrt{3}$ e determine uma equação dessa superfície esférica.

8.3. Determine uma equação do plano mediador do segmento de reta $[AC]$.

9. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a esfera de inequação:

$$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2 \leq 3$$

9.1. Identifique o conjunto de pontos do espaço da interseção da esfera com o plano $z=\sqrt{3}$.

9.2. Determine, caso existam, os pontos de interseção com os eixos coordenados da superfície esférica que limita a esfera.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I

1.	2.	3.1.	3.2.	4.	Total
8	8	8	8	8	**40**

Grupo II

5.	6.1.	6.2.	7.1.	7.2.	7.3.	8.1.	8.2.	8.3.	9.1.	9.2.	Total
20	12	16	10	10	15	10	15	18	16	18	**160**

Proposta de resolução

Grupo I

1. $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y+2)^2-4+(z-3)^2-9=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=14$

Resposta: **(C)**

2. A interseção do plano $y=-3$ com o plano $z=0$, ou seja $y=-3 \wedge z=0$, é uma reta paralela ao eixo das abcissas e interseta o plano yOz no ponto de coordenadas $(0,\ -3,\ 0)$.

Resposta: **(B)**

3.1. Resposta: **(A)**

3.2. $d(A\ ,\ B)=\sqrt{(-2-3)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{(-5)^2+(-5)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

Resposta: **(B)**

4. $N+\overrightarrow{LD}-\overrightarrow{BE}=N+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{LD}=K+\overrightarrow{LD}=C$

Resposta: **(B)**

Grupo II

5. $r=d(A,\ O)=4$ (o ponto A tem coordenadas $(-4,\ 0)$)

Equação da circunferência: $x^2+y^2=16$

Declive da reta AB : $m_{AB}=-\frac{1}{2}$ (vetor diretor $(2,\ -1)$)

Ordenada na origem da reta AB : $0=-\frac{1}{2}\times(-4)+b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0=2+b$

$\Leftrightarrow b=-2$

Equação reduzida da reta AB: $y=-\frac{1}{2}x-2$

O ponto B é um dos pontos de interseção da reta AB com a circunferência.

$$\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ y=-\frac{1}{2}x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\left(-\frac{1}{2}x-2\right)^2=16 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\frac{1}{4}x^2+2x+4=16 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{4}x^2+2x-12=0 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2+8x-48=0 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-\frac{1}{2}\times(-4)-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{12}{5} \\ y=-\frac{1}{2}\times\frac{12}{5}-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{12}{5} \\ y=-\frac{16}{5} \end{cases}$$

Assim, B tem coordenadas $\left(\frac{12}{5}\ ,\ -\frac{16}{5}\right)$.

6.1. $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares $\Leftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{R}: \vec{u} = k\vec{v}$

$\vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow (2\ ,\ -1\ ,\ m) = k\left(-\frac{1}{3}\ ,\ n\ ,\ 2\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -\frac{1}{3}k \\ -1 = nk \\ m = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -6 \\ -1 = -6n \\ m = 2\times(-6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -6 \\ n = \frac{1}{6} \\ m = -12 \end{cases}$$

Assim, $m = -12$ e $n = \frac{1}{6}$.

6.2. Seja $\vec{w}$ o vetor colinear com $\vec{u}$ de norma 1.

Assim, $\vec{w} = k\vec{u} \Leftrightarrow \vec{w} = k(2\ ,\ -1\ ,\ -2) \Leftrightarrow \vec{w} = (2k\ ,\ -k\ ,\ -2k)$.

$\|\vec{w}\| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(2k)^2 + (-k)^2 + (-2k)^2} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4k^2 + k^2 + 4k^2 = 1$

$\Leftrightarrow 9k^2 = 1$

$\Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3} \vee k = \frac{1}{3}$

Logo, $\vec{w}\left(2\times\left(-\frac{1}{3}\right)\ ,\ -\left(-\frac{1}{3}\right)\ ,\ -2\times\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$, ou seja, $\vec{w}\left(-\frac{2}{3}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{2}{3}\right)$ ou $\vec{w}\left(2\times\frac{1}{3}\ ,\ -\frac{1}{3}\ ,\ -2\times\frac{1}{3}\right)$, ou seja, $\vec{w}\left(\frac{2}{3}\ ,\ -\frac{1}{3}\ ,\ -\frac{2}{3}\right)$.

Assim, os vetores pedidos são $\left(-\frac{2}{3}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{2}{3}\right)$ ou $\left(\frac{2}{3}\ ,\ -\frac{1}{3}\ ,\ -\frac{2}{3}\right)$.

7.1. Raio da circunferência: $r = d(A,\ O) = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

Equação da circunferência: $x^2 + y^2 = 25$ (contida no plano $z = 0$)

Os pontos B e C são os pontos de interseção da circunferência com o eixo das ordenadas.

Assim, $0^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y^2 = 25 \Leftrightarrow y = -5 \vee y = 5$

Logo, $B(0,\ 5,\ 0)$ e $C(0,\ -5,\ 0)$.

Note-se que bastaria observar que $[OB]$ e $[OC]$ são raios da circunferência tal como $[OA]$, logo $\overline{OB} = 5$ e $\overline{OC} = 5$.

7.2. Por exemplo: $(x,\ y,\ z) = (0,\ 5,\ 0) + k(0,\ 0,\ 1),\ k \in \mathbb{R}$

7.3. $V = 200\pi \Leftrightarrow \pi \times \overline{OA}^2 \times \overline{BD} = 200\pi$

$\Leftrightarrow \pi \times 5^2 \times \overline{BD} = 200\pi$

$\Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{200\pi}{25\pi}$

$\Leftrightarrow \overline{BD} = 8$

O ponto D é a projeção ortogonal do ponto B no plano de equação $z = 8$.

Assim, D tem coordenadas $(0,\ 5,\ 8)$.

8.1. $y=2 \wedge z=2$

8.2. $E(2,\ 2,\ 2)$ e $O(0,\ 0,\ 0)$

- Diâmetro da superfície esférica:

$$d(E,\ O)=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

- Raio da superfície esférica:

$$r=\frac{d(E,\ O)}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\ \text{ (c.q.m.)}$$

- Centro da superfície esférica:

Ponto médio do segmento de reta $[EO]$

$$M_{[EO]}=\left(\frac{2+0}{2},\ \frac{2+0}{2},\ \frac{2+0}{2}\right)\text{, ou seja, } M_{[EO]}(1,\ 1,\ 1)$$

- Equação da superfície esférica:

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3$$

8.3. $A(2,\ 0,\ 0)$, $C(0,\ 2,\ 0)$ e $P(x,\ y,\ z)$

$$d(A,\ P)=d(C,\ P) \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2+z^2=x^2+(y-2)^2+z^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2+z^2=x^2+y^2-4y+4+z^2$$
$$\Leftrightarrow -4x+4y=0$$
$$\Leftrightarrow x-y=0$$

Uma equação do plano mediador de $[AC]$ é:

$x-y=0$

9.1. $z=\sqrt{3} \wedge (x-1)^2+(y+2)^2+z^2 \leq 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z=\sqrt{3} \wedge (x-1)^2+(y+2)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2 \leq 3$$
$$\Leftrightarrow z=\sqrt{3} \wedge (x-1)^2+(y+2)^2 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow z=\sqrt{3} \wedge x=1 \wedge y=-2$$

Trata-se do ponto de coordenadas $\left(1,\ -2,\ \sqrt{3}\right)$

9.2. • Interseção com o eixo Oy:

$$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=3 \wedge x=0 \wedge z=0$$
$$\Leftrightarrow (0-1)^2+(y+2)^2+0^2=3 \wedge x=0 \wedge z=0$$
$$\Leftrightarrow (y+2)^2=2 \wedge x=0 \wedge z=0$$
$$\Leftrightarrow \left(y+2=-\sqrt{2} \wedge y+2=\sqrt{2}\right) \wedge x=0 \wedge z=0$$
$$\Leftrightarrow \left(y=-2-\sqrt{2} \wedge y=-2+\sqrt{2}\right) \wedge x=0 \wedge z=0$$

Pontos $\left(0,\ -2-\sqrt{2},\ 0\right)$ e $\left(0,\ -2+\sqrt{2},\ 0\right)$

• Interseção com o eixo Ox:

$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=3 \wedge y=0 \wedge z=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=-1 \wedge y=0 \wedge z=0$ (impossível)

A superfície esférica não interseta o eixo Ox .

• Interseção com o eixo Oz :

$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=3 \wedge x=0 \wedge y=0$

$\Leftrightarrow z^2=-2 \wedge x=0 \wedge y=0$ (impossível)

A superfície esférica não interseta o eixo Oz .