Novo Espaço – Matemática 9.º ano

Prova-modelo de Matemática (3.º Ciclo)

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

Caderno 1: 35 minutos. Tolerância: 10 minutos

(é permitido o uso de calculadora)

A prova é constituída por dois cadernos (Caderno 1 e Caderno 2).

Utiliza apenas caneta ou esferográfica, de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de calculadora no Caderno 1.

Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.

Para cada resposta, identifica o item.

Apresenta as tuas respostas de forma legível.

Apresenta apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário e uma tabela trigonométrica.

As cotações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

Formulário

Números

Valor aproximado de π (pi): 3,14159

Geometria

Áreas

Paralelogramo: $Base \times Altura$

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Superfície esférica: $4\pi r^2$, sendo r o raio da esfera

Volumes

Prisma e cilindro: $Área\ da\ base \times Altura$

Pirâmide e cone: $\frac{Área\ da\ base \times Altura}{3}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$, sendo r o raio da esfera

Álgebra

Fórmula resolvente de uma equação do 2.º grau da forma $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Trigonometria

Fórmula fundamental: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Relação da tangente com o seno e o cosseno: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Tabela trigonométrica

Graus	Seno	Cosseno	Tangente	Graus	Seno	Cosseno	Tangente
1	0,0175	0,9998	0,0175	46	0,7193	0,6947	1,0355
2	0,0349	0,9994	0,0349	47	0,7314	0,6820	1,0724
3	0,0523	0,9986	0,0524	48	0,7431	0,6691	1,1106
4	0,0698	0,9976	0,0699	49	0,7547	0,6561	1,1504
5	0,0872	0,9962	0,0875	50	0,7660	0,6428	1,1918
6	0,1045	0,9945	0,1051	51	0,7771	0,6293	1,2349
7	0,1219	0,9925	0,1228	52	0,7880	0,6157	1,2799
8	0,1392	0,9903	0,1405	53	0,7986	0,6018	1,3270
9	0,1564	0,9877	0,1584	54	0,8090	0,5878	1,3764
10	0,1736	0,9848	0,1763	55	0,8192	0,5736	1,4281
11	0,1908	0,9816	0,1944	56	0,8290	0,5592	1,4826
12	0,2079	0,9781	0,2126	57	0,8387	0,5446	1,5399
13	0,2250	0,9744	0,2309	58	0,8480	0,5299	1,6003
14	0,2419	0,9703	0,2493	59	0,8572	0,5150	1,6643
15	0,2588	0,9659	0,2679	60	0,8660	0,5000	1,7321
16	0,2756	0,9613	0,2867	61	0,8746	0,4848	1,8040
17	0,2924	0,9563	0,3057	62	0,8829	0,4695	1,8807
18	0,3090	0,9511	0,3249	63	0,8910	0,4540	1,9626
19	0,3256	0,9455	0,3443	64	0,8988	0,4384	2,0503
20	0,3420	0,9397	0,3640	65	0,9063	0,4226	2,1445
21	0,3584	0,9336	0,3839	66	0,9135	0,4067	2,2460
22	0,3746	0,9272	0,4040	67	0,9205	0,3907	2,3559
23	0,3907	0,9205	0,4245	68	0,9272	0,3746	2,4751
24	0,4067	0,9135	0,4452	69	0,9336	0,3584	2,6051
25	0,4226	0,9063	0,4663	70	0,9397	0,3420	2,7475
26	0,4384	0,8988	0,4877	71	0,9455	0,3256	2,9042
27	0,4540	0,8910	0,5095	72	0,9511	0,3090	3,0777
28	0,4695	0,8829	0,5317	73	0,9563	0,2924	3,2708
29	0,4848	0,8746	0,5543	74	0,9613	0,2756	3,4874
30	0,5000	0,8660	0,5774	75	0,9659	0,2588	3,7321
31	0,5150	0,8572	0,6009	76	0,9703	0,2419	4,0108
32	0,5299	0,8480	0,6249	77	0,9744	0,2250	4,3315
33	0,5446	0,8387	0,6494	78	0,9781	0,2079	4,7046
34	0,5592	0,8290	0,6745	79	0,9816	0,1908	5,1445
35	0,5736	0,8192	0,7002	80	0,9848	0,1736	5,6713
36	0,5878	0,8090	0,7265	81	0,9877	0,1564	6,3138
37	0,6018	0,7986	0,7536	82	0,9903	0,1392	7,1154
38	0,6157	0,7880	0,7813	83	0,9925	0,1219	8,1443
39	0,6293	0,7771	0,8098	84	0,9945	0,1045	9,5144
40	0,6428	0,7660	0,8391	85	0,9962	0,0872	11,4301
41	0,6561	0,7547	0,8693	86	0,9976	0,0698	14,3007
42	0,6691	0,7431	0,9004	87	0,9986	0,0523	19,0811
43	0,6820	0,7314	0,9325	88	0,9994	0,0349	28,6363
44	0,6947	0,7193	0,9657	89	0,9998	0,0175	57,2900
45	0,7071	0,7071	1,0000				

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleciona a opção correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Dados dois números naturais *a* e *b* sabe-se que o mínimo múltiplo comum de *a* e *b* é igual a $a \times b$.

Em qual das seguintes opções podem estar representados os números *a* e *b*?

(A) 4 e 30
(B) 8 e 15
(C) 8 e 30
(D) 6 e 20

2. Num saco há 60 bolas com cores diferentes: bolas vermelhas, bolas brancas e bolas pretas.
Vai ser retirada, ao acaso, uma bola do saco e observada a cor.

Sabe-se que:

- todas as bolas têm igual probabilidade de sair;
- a probabilidade de sair bola vermelha é 25%;
- a probabilidade de não sair bola preta é 65%.

2.1. Determina, na forma de fração irredutível, a probabilidade de ser retirada uma bola preta.

2.2. Determina o número de bolas brancas.

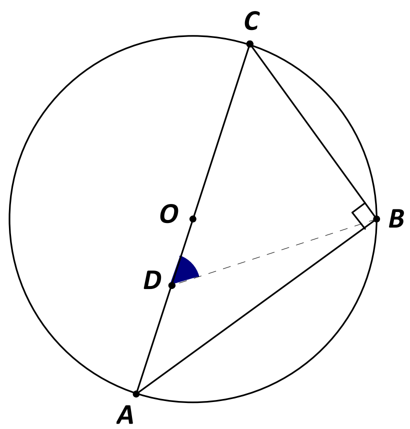
3. Numa sequência numérica o primeiro termo é 1 e qualquer outro termo é igual à diferença entre o quadrado da sua ordem e a ordem do termo anterior.

3.1. O 8.º termo da sequência é:

(A) 73
(B) 57
(C) 43
(D) 63

3.2. Calcula o número de termos da sequência, sabendo que o último termo é 307.

4. Na figura está representada uma circunferência de centro no ponto *O* e raio 3 cm.



Sabe-se que:

- os pontos *A* e *C* são extremos de um diâmetro da circunferência;
- o ponto *B* pertence à circunferência;
- o ponto *D* pertence a [*AC*];
- $\overline{BC} = \overline{BD}$
- $\overset{\frown}{BC} = 72^\circ$

A amplitude, em graus, do ângulo *BDC* é:

(A) 36°
(B) 72°
(C) 54°
(D) 60°

5. A figura 1 é uma fotografia de um quiosque eletrónico para informação turística. Foi construído um modelo geométrico representado por um sólido que pode ser decomposto em dois prismas. Na figura 2, estão representadas a vista de frente e a vista lateral do modelo geométrico.

Figura 1

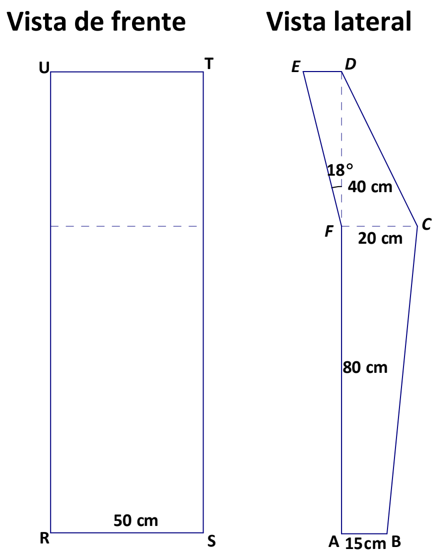


Figura 2

Sabe-se que:

- [*RSTU*] é um retângulo;
- os pontos *A*, *F* e *D* são colineares;
- as retas *AB*, *CF* e *DE* são paralelas;
- o triângulo [*FDE*] é retângulo em *D*;
- a amplitude do ângulo *DFE* é 18º;
- $\overline{RS} = 50\,\text{cm}$
- $\overline{AB} = 15\,\text{cm}$
- $\overline{FC} = 20\,\text{cm}$
- $\overline{AF} = 80\,\text{cm}$
- $\overline{FD} = 40\,\text{cm}$

5.1. Determina $\overline{BC}$. Apresenta o resultado em centímetros arredondado às centésimas.

5.2. O sólido que representa o modelo geométrico do quiosque pode ser decomposto em dois prismas cujas bases são trapézios.
Determina o volume do prisma em que uma das bases é o trapézio [*CDEF*].
Apresenta o resultado em cm^3 arredondado às unidades. Nos arredondamentos em cálculos intermédios preserva no mínimo três casas decimais.

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES

1.	-------------------------------------	4 pontos
2.		
	2.1. -------------------------------	4 pontos
	2.2. -------------------------------	6 pontos
3.		
	3.1. -------------------------------	4 pontos
	3.2. -------------------------------	6 pontos
4.	-------------------------------------	5 pontos
5.		
	5.1. -------------------------------	5 pontos
	5.2. -------------------------------	6 pontos
	Subtotal (Caderno 1)	40 pontos

Prova-modelo de Matemática (3.º Ciclo)

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

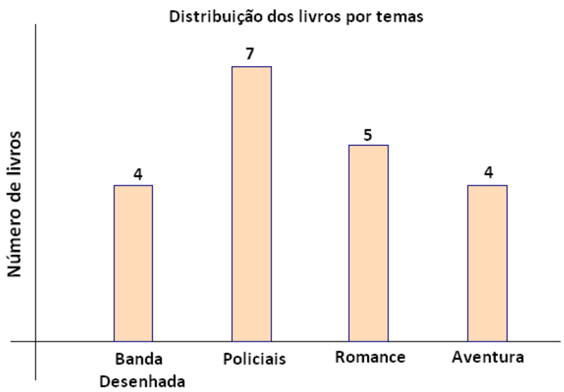
Caderno 2: 55 minutos. Tolerância: 20 minutos.

(não é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleciona a opção correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

---

6. A Rita tem uma coleção constituída por 20 livros.
A seguir, no gráfico de barras, é apresentada a distribuição dos livros por temas. No diagrama de caule-e-folhas é apresentada a distribuição do número de páginas dos livros.



Número de páginas dos livros

6	4	6	6	8		
7	0	6	8	8	8	
8	2	2	4	4	6	6
9	0	0	4	4	6	

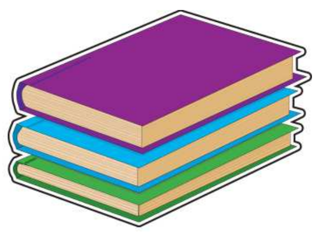
Legenda: 7|6 significa 76 páginas

6.1. Escolhe-se, ao acaso, um livro da coleção da Rita.
Qual é a probabilidade de esse livro não ser de banda desenhada? Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

6.2. Sabe-se que, em média, cada livro da coleção da Rita tem 80,6 páginas.
Escolhe-se, ao acaso, um livro.
A probabilidade de o livro escolhido ter um número de páginas inferior à média é:

(A) 50% **(B)** 45% **(C)** 55% **(D)** 60%

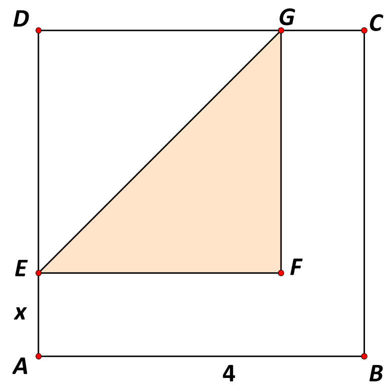
6.3. A Rita levou para férias três livros: um romance e dois livros de aventuras.
Empilhou-os ao acaso.
Qual é a probabilidade, em fração irredutível, de o romance ficar entre os livros de aventura?
Mostra como chegaste à tua resposta.



7. A soma dos números inteiros que pertencem ao conjunto $]\pi, 7] \cap]4, \sqrt{50}[$ é igual a:

(A) 18 **(B)** 22 **(C)** 11 **(D)** 15

8. Na figura estão representados dois quadrados: [*ABCD*] e [*DEFG*] .



Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 4$;
- $\overline{AE} = x$, com $x \in \left]0, 4\right[$.

Qual das seguintes expressões representa a área do triângulo [*EFG*] para qualquer valor de $x \in \left]0, 4\right[$?

(A) $8 - 2x$

(B) $\dfrac{16 - x^2}{2}$

(C) $\dfrac{(4 - x)x}{2}$

(D) $8 - 4x + \dfrac{x^2}{2}$

9. Resolve a equação seguinte.

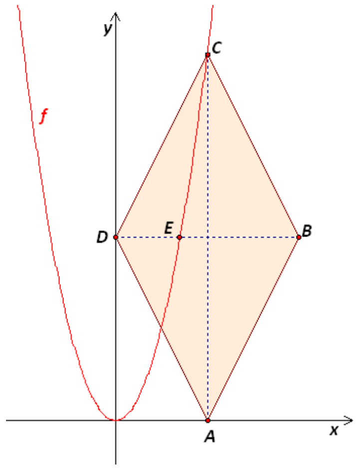
$$(x - 2)^2 + 5 = 6x$$

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

10. Na figura, em referencial cartesiano ortonormado, está representada parte do gráfico de uma função *f* e um losango [*ABCD*].

Sabe-se que:

- $f(x) = 2x^2$;
- os vértices *A* e *D* pertencem aos eixos coordenados, respetivamente a *Ox* e a *Oy*;
- os vértices *A* e *C* têm abcissa 2 e *C* é um ponto do gráfico de *f*;
- o ponto *E* pertence ao gráfico de *f* e à diagonal [*BD*] do losango.



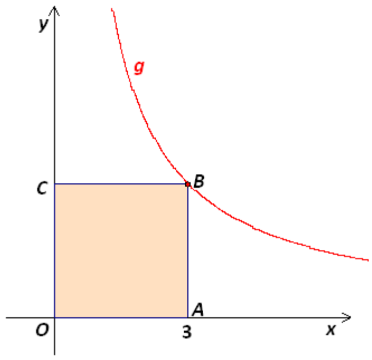
10.1. Identifica, usando letras da figura, a imagem do ponto *D* pela translação de vetor $\overrightarrow{AB}$.

10.2. Determina a área do losango.

10.3. Determina as coordenadas do ponto *E*.

10.4. Resolve a inequação $f(x) \leq 9 + 2(x^2 - 3x)$ e representa na forma de intervalo o conjunto dos números positivos que são solução da inequação.

11. Na figura, estão representados um quadrado [*OABC*] e parte do gráfico de uma função *g* de proporcionalidade inversa.
As coordenadas do vértice *A* são $(3, 0)$.
O vértice *B* pertence ao gráfico de *g*.



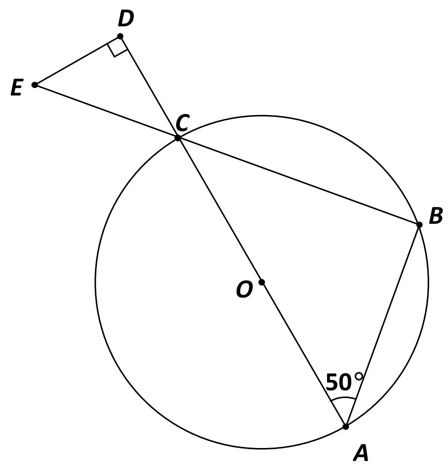
11.1. Seja B' a imagem do ponto *B* pela rotação de centro *O* e amplitude $45°$.
As coordenadas do ponto B' são:

(A) $(0, 3)$ **(B)** $(-3, 3)$ **(C)** $(0, \sqrt{18})$ **(D)** $(\sqrt{18}, 0)$

11.2. Quais das seguintes coordenadas podem corresponder a um ponto *P* que pertence ao gráfico de *g*?

(A) $\left(2, \frac{9}{2}\right)$ **(B)** $(2, 4)$ **(C)** $(9, 2)$ **(D)** $\left(6, \frac{2}{3}\right)$

12. Na figura está representada uma circunferência de centro no ponto *O*.



Sabe-se que:

- os pontos *A*, *B* e *C* pertencem à circunferência;
- os pontos *A*, *O*, *C* e *D* pertencem à mesma reta;
- o ponto *E* pertence à reta *BC*;
- o triângulo [*CDE*] é retângulo em *D*;
- a amplitude do ângulo *BAC* é $50°$.

12.1. O segmento de reta [*AB*] pode ser o lado de um polígono regular inscrito na circunferência? Justifica a tua resposta.

12.2. Considera a afirmação:
"Os triângulos [*ABC*] e [*CDE*] são semelhantes."
Justifica a afirmação.

12.3. Determina o valor da razão entre a área do triângulo [*ABC*] e a área do triângulo [*CDE*], sabendo que:

- os triângulos [*ABC*] e [*CDE*] são semelhantes;
- o raio da circunferência é 3;
- $\overline{CE} = 2$

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES

Subtotal (Caderno 1)		40 pontos
6.		
	6.1.	3 pontos
	6.2.	3 pontos
	6.3.	4 pontos
7.		3 pontos
8.		5 pontos
9.		4 pontos
10.		
	10.1.	3 pontos
	10.2.	4 pontos
	10.3.	5 pontos
	10.4.	5 pontos
11.		
	11.1.	4 pontos
	11.2.	4 pontos
12.		
	12.1.	4 pontos
	12.2.	4 pontos
	12.3.	5 pontos
Subtotal (Caderno 2)		60 pontos
TOTAL		100 pontos

Proposta de Resolução

Caderno 1

1. Opção **(B)**; 8 e 15

Sabe-se que $\text{m.m.c.}(a,b)\times\text{m.d.c.}(a,b)=a\times b$.

Neste caso, tem-se $\text{m.m.c.}(a,b)=a\times b$. Então, $\text{m.d.c.}(a,b)=1$, ou seja, os números *a* e *b* são primos entre si. A única opção que satisfaz é a (B).

2.

2.1. Seja *A* o acontecimento: “sair bola preta”.

$P(A)=1-0,65=0,35$.

Como $0,35=\dfrac{35}{100}=\dfrac{7}{20}$

Resposta: $\dfrac{7}{20}$

2.2. Número de bolas vermelhas: $0,25\times 60=15$

Número de bolas vermelhas ou brancas (não pretas): $0,65\times 60=39$

Número de bolas brancas: $39-15=24$

Resposta: 24

3.

3.1. Opção **(B)**; 57

8.º termo: $8^2-7=57$

3.2. Seja *n* a ordem do último termo.

Então, $307=n^2-(n-1)$.

$$307=n^2-(n-1)\Leftrightarrow n^2-n-306=0$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{1\pm\sqrt{1+1224}}{2}\Leftrightarrow n=18\ \vee\ n=-17$$

A ordem do último termo é 18. Conclui-se que a sequência tem 18 termos.

Resposta: 18

Proposta de Resolução

4. Opção **(C)**; $54°$

$\overset{\frown}{AB} = 180 - 72 = 108$

$\overset{\frown}{AB} = 108°$

$D\hat{C}B = \dfrac{108}{2} = 54$

$D\hat{C}B = B\hat{D}C = 54°$. Nota que num triângulo a lados iguais opõem-se ângulos iguais.

Resposta: $54°$

5.

5.1. Recorrendo ao Teorema de Pitágoras, tem-se:

$\left(\overline{BC}\right)^2 = 80^2 + (20-15)^2$

$\left(\overline{BC}\right)^2 = 80^2 + (20-15)^2$

$\overline{BC} = \sqrt{6425}$

$\overline{BC} \approx 80,16$

Resposta: $80,16\,\text{cm}$

5.2. A base do prisma é [*CDEF*] e a altura é 50 cm.

$\tan(18^\circ) = \dfrac{\overline{DE}}{40}$. Então, $\overline{DE} = 40 \times \tan(18^\circ)$

$\overline{DE} \approx 12,997$.

Área da base, ou seja, área do trapézio [*CDEF*]: $A_b = \dfrac{\overline{FC} + \overline{DE}}{2} \times \overline{FD}$

$A_b = \dfrac{20 + 40 \times \tan(18°)}{2} \times 40 \approx 659,936$

Volume do prisma: $V = A_b \times 50$

$V = A_b \times 50 \approx 32997$

Resposta: $32997\,\text{cm}^3$

Proposta de Resolução

Caderno 2

6.

6.1. Há 16 livros que não são de banda desenhada.

A probabilidade pedida é dada por $\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$.

Resposta: $\frac{4}{5}$

6.2. Opção **(B)**; 45%

Recorrendo ao diagrama de caule-e-folhas verifica-se que há 9 livros em que o número de páginas é inferior a 80,6.

Assim, a probabilidade pedida é $\frac{9}{20}=0,45$.

Resposta: 45%

6.3. Os dois livros de aventuras podem ser designados por Av_1 e por Av_2.
O livro de romance pode ser designado por *Rom*.

Os casos possíveis para os empilhar são:

Av_1 Av_2 Rom	Av_2 Av_1 Rom	Av_1 Rom Av_2	Av_2 Rom Av_1	Rom Av_1 Av_2	Rom Av_2 Av_1

Há 6 casos possíveis e 2 casos favoráveis.

Assim, a probabilidade pedida é $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Resposta: $\frac{1}{3}$

7. Opção **(A)**; 18

$\pi < 4 < 7 < \sqrt{50}$

$]\pi,7]\cap]4,\sqrt{50}[=]4,7]$

Os números inteiros que pertencem ao conjunto dado são: 5, 6 e 7. A soma destes números é 18.

Resposta: 18

Proposta de Resolução

8. Opção **(D)**; $8-4x+\frac{x^2}{2}$

Área do quadrado [*EFGD*]: $(4-x)^2$

Área do triângulo [*EFG*]: $\frac{(4-x)^2}{2}=\frac{16-8x+x^2}{2}=8-4x+\frac{x^2}{2}$

Resposta: $8-4x+\frac{x^2}{2}$

9. $(x-2)^2+5=6x$

$(x-2)^2+5=6x \Leftrightarrow x^2-4x+4+5=6x \Leftrightarrow x^2-10x+9=0$

$x=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{10\pm 8}{2} \Leftrightarrow x=9 \vee x=1$

Conjunto-solução: $\{1,\ 9\}$

10.

10.1. $D+\overrightarrow{AB}=D+\overrightarrow{DC}=C$

Resposta: C

10.2. $C(2, f(2))$;

$f(2)=2\times 2^2=8$

$C(2,8)$ e $A(2,0)$

Então, $\overline{AC}=8$.

As diagonais do losango bissetam-se. Então as coordenadas de *D* são $(0,4)$ e as coordenadas de *B* são $(4,4)$.

Então, $\overline{BD}=4$.

Área do losango [*ABCD*]: $\frac{\overline{AC}\times\overline{BD}}{2}=\frac{8\times 4}{2}=16$

Resposta: 16

Proposta de Resolução

10.3. Em relação ao ponto E sabe-se que a ordenada é 4 e que pertence ao gráfico de f.

$E(x,4)$ e $f(x)=4$

$f(x)=4 \Leftrightarrow 2x^2=4 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\sqrt{2} \vee x=-\sqrt{2}$

Como a abcissa de E é positiva tem-se: $E\left(\sqrt{2},4\right)$.

10.4. $f(x)\leq 9+2\left(x^2-3x\right)$.

$f(x)\leq 9+2\left(x^2-3x\right) \Leftrightarrow 2x^2\leq 9+2x^2-6x \Leftrightarrow 6x\leq 9 \Leftrightarrow x\leq \frac{3}{2}$

Conjunto-solução: $\left]-\infty,\frac{3}{2}\right]$

O conjunto dos números positivos que são solução é dado por:
$\left]-\infty,\frac{3}{2}\right]\cap\mathbb{R}^+=\left]0,\frac{3}{2}\right]$

Resposta: $\left]0,\frac{3}{2}\right]$

11.

11.1. Opção **(C)**; $\left(0,\sqrt{18}\right)$

$\overline{OB'}=\overline{OB}=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}$ e B' pertence ao semieixo positivo Oy.

Então, $B'\left(0,\sqrt{18}\right)$.

Resposta: $\left(0,\sqrt{18}\right)$

11.2. Opção **(A)**; $\left(2,\frac{9}{2}\right)$

$g(x)=\frac{k}{x}$. Sabe-se que $g(3)=3$. Então, $\frac{k}{3}=3 \Leftrightarrow k=9$. $g(x)=\frac{9}{x}$

Como $g(2)=\frac{9}{2}$, conclui-se que o ponto de coordenadas $\left(2,\frac{9}{2}\right)$ pertence ao gráfico de g.

Proposta de Resolução

12.

12.1. $\overset{\frown}{AB} = 180 - \overset{\frown}{BC} = 180 - 100 = 80$

$\overset{\frown}{AB} = 80^\circ$

À corda [*AB*] corresponde o arco *AB* de amplitude 80°.

Se [*AB*] for o lado de um polígono regular inscrito na circunferência, então $\frac{360}{80} \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$.

Como $\frac{360}{80} = 4,5$ e $4,5 \notin \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$, conclui-se que [*AB*] não pode representar um lado de um polígono regular inscrito na circunferência.

12.2. Basta atender a que $A\hat{C}B = D\hat{C}E$ (ângulos verticalmente opostos) e $C\hat{B}A = E\hat{D}C = 90^\circ$ (o ângulo *CBA* é inscrito numa semicircunferência).

Como os dois triângulos, de um para o outro, têm dois ângulos iguais são semelhantes (critério AA).

12.3. Se dois triângulos são semelhantes e a razão de semelhança é *r*, então a razão entre as áreas é r^2.

Na ampliação a imagem do triângulo [*CDE*] é o triângulo [*ABC*].

$r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{6}{2} = 3$.

Então a razão entre as áreas dos triângulo [*ABC*] e do triângulo [*CDE*] é igual a r^2, ou seja, 9.

Resposta: 9