Teste de Matemática A

2022 / 2023

Teste N.º 4

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

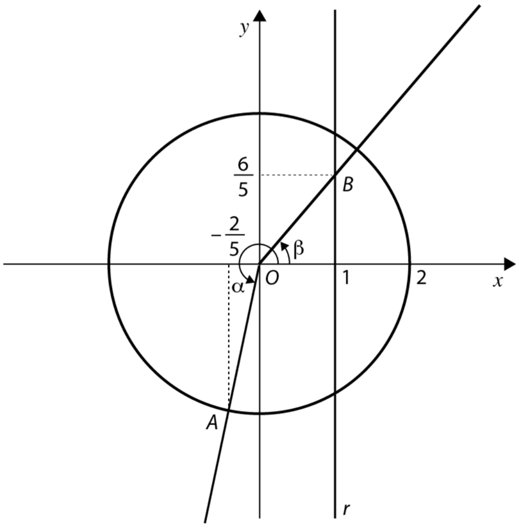
11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Na figura estão representados, em referencial o.n. Oxy do plano:



- uma circunferência de centro na origem e raio igual a 2;
- a reta r de equação $x = 1$;
- o ponto A pertencente à circunferência e de abcissa igual a $-\frac{2}{5}$;
- o ponto B de coordenadas $\left(1, \frac{6}{5}\right)$;
- o ângulo de amplitude α, que tem por lado origem o semieixo positivo das abcissas e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}A$;
- o ângulo de amplitude β, que tem por lado origem o semieixo positivo das abcissas e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}B$.

O valor exato da expressão $\mathrm{tg}^2\,\alpha - \mathrm{tg}^2\,\beta$ é:

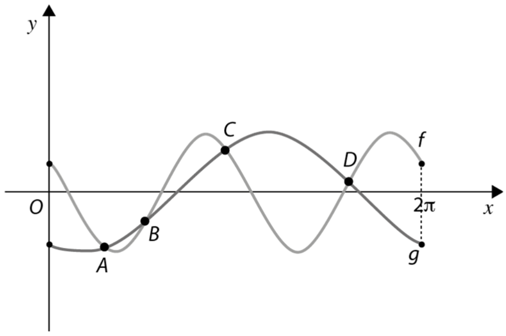
(A) $\frac{564}{25}$

(B) $\frac{381}{100}$

(C) $\frac{614}{25}$

(D) $\frac{318}{100}$

2. No referencial seguinte estão representados os gráficos das funções f e g, definidas, no intervalo $[0, 2\pi]$, por $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ e $g(x) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, e os pontos de interseção dos dois gráficos A, B, C e D.

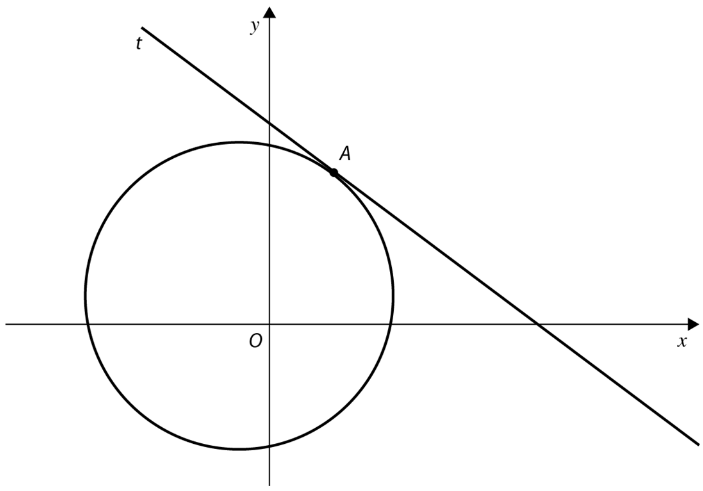


Determine, por métodos exclusivamente analíticos, as abcissas dos pontos de interseção dos dois gráficos.

3. Na figura estão representadas, num referencial o.n. Oxy:

- a circunferência de equação $x^2 + 2x + y^2 - 2y = 23$;
- a reta t tangente à circunferência no ponto A.

Sabe-se que o ponto A tem coordenadas $(2, 5)$.



Determine a inclinação da reta t, em radianos, com aproximação às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

4. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α definido pela condição:

$$4x + 2y - z + 2 = 0$$

Resolva os itens seguintes sem recurso à calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos.

4.1. Considere o ponto $P\left(-2, -1, \frac{a}{2}\right)$, sendo a um certo número real.

Sabe-se que a reta OP é estritamente paralela ao plano α, sendo O a origem do referencial.

O valor de a é:

(A) -20 **(B)** -4 **(C)** 4 **(D)** 20

4.2. Seja A o ponto de interseção do plano α com o eixo Ox. Seja B o ponto de interseção do plano α com o eixo Oy. Seja C o ponto pertencente ao semieixo negativo Oz tal que $A\hat{B}C = \frac{\pi}{3}$.

Determine a cota do ponto C.

4.3. Determine uma equação da superfície esférica de centro na origem do referencial que é tangente ao plano α. Na resolução deste item, tenha em conta que o raio relativo ao ponto de tangência é perpendicular ao plano α.

5. Seja f a função real de variável real definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x-2 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$.

Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n = \frac{(-1)^{2n+1}}{-n^3+1}$. O valor de $\lim f(u_n)$ é igual a:

(A) $+\infty$ **(B)** 1 **(C)** 0 **(D)** -2

6. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = \frac{3n+(-1)^{n+1}}{n}$.

Determine, sem recorrer à calculadora, quantos termos de ordem ímpar da sucessão (u_n) pertencem ao intervalo $\left[\frac{118}{39}, \frac{40}{13}\right[$.

7. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$.

Resolva as seguintes alíneas, recorrendo a processos exclusivamente analíticos.

7.1. Determine para que valores reais de x as ordenadas dos pontos do gráfico de f são superiores às respetivas abcissas.

7.2. Recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto, determine $f'(1)$.

7.3. Considere o gráfico da função f, representado num referencial o.n. Oxy, e sejam r e s as assíntotas, respetivamente horizontal e vertical, ao gráfico de f.
Sejam A o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Ox e B o ponto de interseção das retas r e s. Determine o valor exato da área do triângulo $[OAB]$.

8. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)^2}{x^3-8} + \sqrt{5} & \text{se} \quad x > 2 \\ k & \text{se} \quad x = 2, \\ \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}}{x-2} & \text{se} \quad x < 2 \end{cases} \quad \text{com } k \in \mathbb{R}$$

Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

8.1. Mostre que, independentemente do valor de k, não existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

8.2. Determine, se existirem, o valor de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ e o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

9. Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}$, diferenciável em todos os pontos do seu domínio.

Sabe-se que $\lim\limits_{x \to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x^2-2x} = 5$.

Seja t a reta tangente ao gráfico de g em $x = 2$.

Qual é a equação reduzida de uma reta perpendicular à reta t?

(A) $y = 10x - 17$ **(B)** $y = 5x - 7$ **(C)** $y = -\frac{1}{10}x + \frac{16}{5}$ **(D)** $y = -\frac{1}{5}x + \frac{17}{5}$

10. Admita que o número de pessoas com telemóvel, em milhares, num determinado país, entre 1990 e 1999, t anos após o início de 1990, é dado por:

$$N(t) = \frac{1779+3437{,}9t}{1-0{,}1t+0{,}004t^2}, \text{ com } t \in [0, 9]$$

10.1. Qual é, com aproximação às unidades, a percentagem de aumento do número de pessoas com telemóvel, no primeiro ano, após o início de 1990?

(A) 24% **(B)** 124% **(C)** 224% **(D)** 324%

10.2. Existe um instante a partir do qual, passados três anos, o número de pessoas com telemóvel duplica. Determine, recorrendo à calculadora, esse instante, sabendo-se que existe e é único. Apresente o resultado em anos e dias (com os dias arredondados às unidades).

Considere que um ano tem 365 dias.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente a(s) coordenada(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às milésimas.

FIM

COTAÇÕES

Item																
Cotação (em pontos)																
1.	**2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**5.**	**6.**	**7.1.**	**7.2.**	**7.3.**	**8.1.**	**8.2.**	**9.**	**10.1.**	**10.2.**	**TOTAL**
10	15	15	10	15	15	10	15	15	10	14	12	12	10	10	12	200

TESTE N.º 4 – Proposta de resolução

1. Opção (A)

$A(2\cos\alpha,\ 2\operatorname{sen}\alpha)$

$$2\cos\alpha = -\frac{2}{5} \Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{5}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\frac{1}{25}} \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 25 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2\alpha = 24$$

O ponto B tem coordenadas $\left(1, \frac{6}{5}\right)$ e o ângulo de amplitude β tem por lado origem o semieixo positivo das abcissas e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}B$, logo $\operatorname{tg}\beta = \frac{6}{5}$, ou seja, $\operatorname{tg}^2\beta = \frac{36}{25}$.

Assim, $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta = 24 - \frac{36}{25} = \frac{564}{25}$.

2. Seja $x \in [0, 2\pi]$.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} - x + 2k\pi \ \vee\ 2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{6} + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ \vee\ x = -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \ \vee\ x = -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Em $[0, 2\pi]$:

$k = 0 \ \backsim\ x = \frac{5\pi}{18} \ \vee\ x = -\frac{3\pi}{2} \left(-\frac{3\pi}{2} \notin [0, 2\pi]\right)$

$k = 1 \ \backsim\ x = \frac{17\pi}{18} \ \vee\ x = \frac{\pi}{2}$

$k = 2 \ \backsim\ x = \frac{29\pi}{18} \ \vee\ x = \frac{5\pi}{2} \left(\frac{5\pi}{2} \notin [0, 2\pi]\right)$

As abcissas dos pontos A, B, C e D são, respetivamente, $\frac{5\pi}{18}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{17\pi}{18}$ e $\frac{29\pi}{18}$.

3. $x^2 + 2x + y^2 - 2y = 23 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 23 + 1 + 1$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 25$$

Seja C o centro da circunferência $C(-1, 1)$.

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da reta t:

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \Leftrightarrow (3, 4) \cdot (x - 2, y - 5) = 0$

$\Leftrightarrow 3x - 6 + 4y - 20 = 0$

$\Leftrightarrow 4y = -3x + 26$

$\Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{2}$

Cálculos auxiliares

- $\overrightarrow{CA} = (2, 5) - (-1, 1) = (3, 4)$
- $\overrightarrow{AP} = (x, y) - (2, 5) = (x - 2, y - 5)$

Seja α a inclinação da reta t: $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{3}{4} \wedge 0 \leq \alpha < \pi$

Então, $\alpha \approx \pi - 0{,}644$, ou seja, $\alpha \approx 2{,}5 \text{ rad}$.

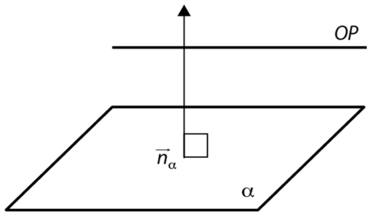
4.

4.1. Opção (A)

$\overrightarrow{OP} = P - O = \left(-2, -1, \frac{a}{2}\right)$

$\overrightarrow{n_\alpha}(4, 2, -1)$

$\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{n_\alpha}$ são perpendiculares, logo:



$\left(-2, -1, \frac{a}{2}\right) \cdot (4, 2, -1) = 0 \Leftrightarrow -8 - 2 - \frac{a}{2} = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{a}{2} = 10$

$\Leftrightarrow a = -20$

4.2. $A(a, 0, 0)$ -----> $4a + 0 - 0 + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

$B(0, b, 0)$ -----> $0 + 2b - 0 + 2 = 0 \Leftrightarrow b = -1$

$C(0, 0, c)$, com $c < 0$.

$A\hat{B}C = \widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}$

$\overrightarrow{BA} = \left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right) - (0, -1, 0) = \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)$

$\overrightarrow{BC} = (0, 0, c) - (0, -1, 0) = (0, 1, c)$

$$\cos\left(A\hat{B}C\right) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BC}\right\|}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1} \times \sqrt{1 + c^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2} \times \sqrt{1 + c^2}}$$

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \sqrt{1 + c^2}$$

$\Leftrightarrow 4 = \sqrt{5 + 5c^2}$

$\Leftrightarrow 16 = 5 + 5c^2$, pois os dois membros da equação anterior são não negativos.

$\Leftrightarrow 5c^2 = 11$

$\Leftrightarrow c^2 = \frac{11}{5}$

$\Leftrightarrow c = \pm\frac{\sqrt{55}}{5}$

Como $c < 0$, então $c = -\frac{\sqrt{55}}{5}$. A cota do ponto C é igual a $-\frac{\sqrt{55}}{5}$.

4.3. A equação da superfície esférica de centro na origem do referencial e raio r é dada por:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Seja T o ponto de tangência.

$OT: (x, y, z) = (0, 0, 0) + k(4, 2, -1), k \in \mathbb{R}$

$(4k, 2k, -k), k \in \mathbb{R}$ representa um ponto genérico da reta OT.

$4(4k) + 2(2k) - (-k) + 2 = 0 \Leftrightarrow 16k + 4k + k = -2$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{2}{21}$$

$T\left(-\frac{8}{21}, -\frac{4}{21}, \frac{2}{21}\right)$

$r = \overline{OT} = \sqrt{\left(-\frac{8}{21}\right)^2 + \left(-\frac{4}{21}\right)^2 + \left(\frac{2}{21}\right)^2} = \sqrt{\frac{84}{441}} = \sqrt{\frac{4}{21}}$

A equação pedida é $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4}{21}$.

5. Opção (D)

$u_n = \frac{(-1)^{2n+1}}{-n^3 + 1} = \frac{-1}{-n^3 + 1} = \frac{1}{n^3 - 1}$

$\lim u_n = \lim \frac{1}{n^3 - 1} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$

$\lim f(u_n) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x - 2) = -2$

6. $u_n = \frac{3n + (-1)^{n+1}}{n} = 3 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Se n é ímpar, $u_n = 3 + \frac{1}{n}$.

$$\frac{118}{39} \leq 3 + \frac{1}{n} < \frac{40}{13} \Leftrightarrow \frac{118}{39} - 3 \leq \frac{1}{n} < \frac{40}{13} - 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{118}{39} - \frac{117}{39} \leq \frac{1}{n} < \frac{40}{13} - \frac{39}{13}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{39} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{13}$$

$$\Leftrightarrow 13 < n \leq 39$$

$n \in \{15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39\}$

13 termos de ordem ímpar da sucessão (u_n) pertencem ao intervalo $\left[\frac{118}{39}, \frac{40}{13}\right[$.

7.

7.1. $f(x) > x \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-2} > x$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-2} - x > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+1-x^2+2x}{x-2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+4x+1}{x-2} > 0$$

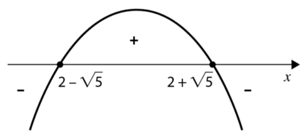
Cálculos auxiliares

$$-x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times (-1)}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{5}$$

x	$-\infty$	$2-\sqrt{5}$		2		$2+\sqrt{5}$	$+\infty$
$-x^2+4x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{-x^2+4x+1}{x-2}$	$+$	0	$-$	n.d.	$+$	0	$-$



$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+4x+1}{x-2} > 0$$

$$\Leftrightarrow x < 2 - \sqrt{5} \ \vee \ 2 < x < 2 + \sqrt{5}$$

$\text{C. S.} =]-\infty, 2-\sqrt{5}[\cup]2, 2+\sqrt{5}[$

7.2. $f'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{2x+1}{x-2}+3}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{2x+1+3x-6}{(x-2)(x-1)} =$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{5x-5}{(x-2)(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{5(x-1)}{(x-2)(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{5}{x-2} =$$

$$= \frac{5}{-1} =$$

$$= -5$$

7.3. $\frac{2x+1}{x-2} = 2 + \frac{5}{x-2}$

Cálculo auxiliar

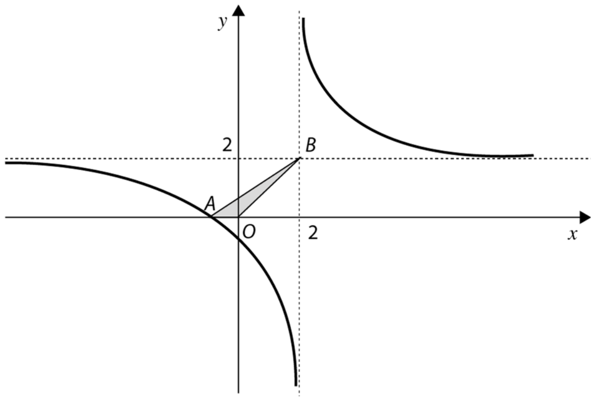
$$\begin{array}{r|l} 2x+1 & x-2 \\ \cline{2-2} -2x+4 & 2 \\ \hline 5 & \end{array}$$

A reta de equação $y = 2$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f e a reta de equação $x = 2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f.

r: $x = 2$

s: $y = 2$

$B(2, 2)$



$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \ \wedge \ x - 2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \ \wedge \ x \neq 2$$

$A_{[OAB]} = \frac{\left|-\frac{1}{2}\right| \times 2}{2} = \frac{1}{2}$ u.a.

8.

8.1. Para que exista $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ terá que se verificar $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = k$.

Cálculo auxiliar

	1	0	0	−8
2		2	4	8
	1	2	4	0

$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$

- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(\frac{(x-2)^2}{x^3 - 8} + \sqrt{5} \right) =$

$$= \lim_{x \to 2^+} \left(\frac{(x-2)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} \right) + \sqrt{5} =$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{x-2}{x^2+2x+4} + \sqrt{5} =$$

$$= \frac{0}{12} + \sqrt{5} =$$

$$= \sqrt{5}$$

- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{5}}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{5}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{5}\right)} =$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}\right)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+1-5}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}\right)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Como, independentemente do valor de k, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, verifica-se que não existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$. Conclui-se, assim, que não existe valor real k, para o qual exista $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

8.2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{(x-2)^2}{x^3-8} + \sqrt{5}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-4x+4}{x^3-8}\right) + \sqrt{5} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{8}{x^3}\right)} + \sqrt{5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{x\left(1-\frac{8}{x^3}\right)} + \sqrt{5} =$$

$$= \frac{1-0+0}{+\infty(1-0)} + \sqrt{5} = \frac{1}{+\infty} + \sqrt{5} =$$

$$= 0 + \sqrt{5} = \sqrt{5}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-\sqrt{5}}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{5}}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{5}}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{\sqrt{5}}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{\sqrt{5}}{x}\right)}{1-\frac{2}{x}} =$$

$$= \frac{-\left(\sqrt{1+0}+0\right)}{1-0} = -1$$

9. Opção (C)

$$\lim_{x\to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x^2-2x} = 5 \Leftrightarrow \lim_{x\to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x\,(x-2)} = 5 \Leftrightarrow \lim_{x\to 2} \frac{1}{x} \times \lim_{x\to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \times \lim_{x\to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = 5$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = 10 \quad (10 \in \mathbb{R})$$

Seja m_t o declive da reta t. Como $\lim\limits_{x\to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2}$ existe e é finito, tem-se que $m_t = \lim\limits_{x\to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = 10$. Uma reta perpendicular à reta t tem declive $-\frac{1}{m_t}$, ou seja, $-\frac{1}{10}$. Das opções apresentadas, apenas é possível a opção onde se apresenta a equação reduzida $y = -\frac{1}{10}x + \frac{16}{5}$.

10.

10.1. Opção (C)

$N(0) = 1779$

$N(1) = 5770{,}907$

$\frac{N(1) - N(0)}{N(0)} = 2{,}243905$

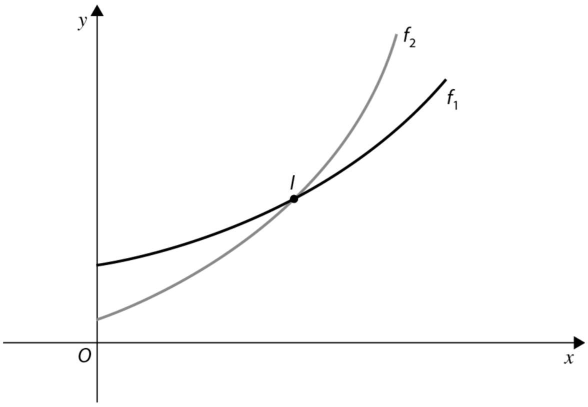
A percentagem de aumento do número de pessoas com telemóvel, no primeiro ano, após o início de 1990, é de, aproximadamente, $224{,}4\%$.

10.2. $N(t+3) = 2N(t),\ 0 \leq t \leq 6 \Leftrightarrow \frac{1779 + 3437{,}9(t+3)}{1-0{,}1(t+3) + 0{,}004(t+3)^2} = 2 \times \frac{1779 + 3437{,}9t}{1 - 0{,}1t + 0{,}004t^2}, 0 \leq t \leq 6$

Usando a letra x com variável independente:

$f_1(x) = \frac{1779\ +\ 3437{,}9(x+3)}{1 - 0{,}1(x+3) + 0{,}004(x+3)^2}$

$f_2(x) = 2 \times \frac{1779 + 3437{,}9x}{1 - 0{,}1x + 0{,}004x^2}$



$I\ (5{,}185; 66\ 556{,}885)$

$0{,}185 \times 365 \approx 68$

O instante que se pretende determinar corresponde a 5 anos e 68 dias após o início de 1990.