Novo Espaço – Matemática A, 12.º ano

Proposta de teste de avaliação global [maio de 2021]

A prova inclui cinco itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final (itens 1.1., 1.2., 1.3., 7.1. e 7.2.).

Dos restantes 14 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os oito itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor.

Risca aquilo que pretendes que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica em modo de exame.

Apresenta apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, seleciona a opção correta. Escreve, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresenta sempre o valor exato.

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr
(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$

(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(r : raio da base; g : geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$

(r : raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r : raio)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

COMPLEXOS

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\left(k \in \{0, \ldots, n-1\}\text{ e } n \in \mathbb{N}\right)$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad \left(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\right)$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad \left(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\right)$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

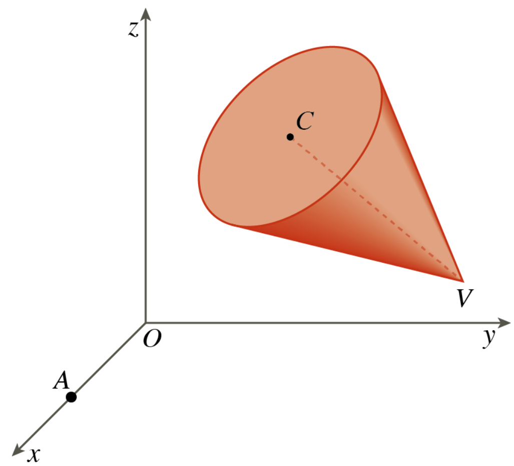
$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Na figura está representado, num referencial o.n. *Oxy*, um cone reto.



Sabe-se que:

- a base do cone tem como centro o ponto C e está contida no plano definido pela equação $x+2y-z=4$;
- o vértice do cone é o ponto V de coordenadas $(3,8,3)$;
- o ponto A é o ponto de interseção do plano que contém a base do cone com o eixo Ox.

1.1. Determina a equação reduzida da superfície esférica em que um dos diâmetros é $[OV]$.

1.2. Determina a amplitude do ângulo AOV.

Apresenta o resultado em graus, arredondado às unidades.

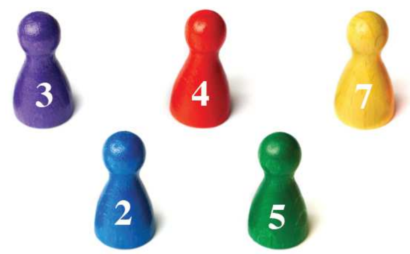
Se em cálculos intermédios procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, três casas decimais.

1.3. Admite que a unidade de comprimento, no referencial, é o centímetro e que a base do cone tem $60\ \text{cm}^2$ de área.

Determina, em centímetros cúbicos, o volume do cone.

Apresenta o resultado arredondados às unidades.

2. Na figura estão representados cinco peões que fazem parte de um jogo.



Cor do peão	Número do peão
Azul	2
Roxa	3
Vermelha	4
Verde	5
Amarela	7

2.1. Os cinco peões foram introduzidos num saco.

Retiraram-se do saco, de uma só vez, de forma aleatória, três peões.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: "O peão vermelho com o número 4 é retirado."

B: "A soma dos números dos peões retirados é um número ímpar."

Determina o valor da probabilidade condicionada $P\left(\overline{B}\middle|A\right)$.

2.2. Os cinco peões vão ser dispostos, lado a lado, tal como é sugerido na figura.

De quantas maneiras diferentes é possível dispor os peões, atendendo às suas cores, de modo que o peão azul fique à esquerda do peão vermelho?

(A) 60 **(B)** 48 **(C)** 115 **(D)** 42

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos dessa experiência aleatória.

Sabe-se que:

- $P\left(\overline{A \cap B}\right) = 0,9$
- $P(A) = \frac{1}{2}P(A \cup B)$

Mostra que o acontecimento B tem maior probabilidade de ocorrer do que o acontecimento A.

4. Seja (u_n) a progressão aritmética definida por:

$$\begin{cases} u_1 = -5 \\ u_{n+1} = 3 + u_n \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

4.1. Qual é a soma dos vinte termos consecutivos da progressão aritmética a começar no décimo termo?

(A) 1010 **(B)** 470 **(C)** 1040 **(D)** 1155

4.2. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3^{1-x}$.

A que é igual $\lim f(u_n)$?

(A) $-\infty$ **(B)** 3 **(C)** $+\infty$ **(D)** 0

5. Para um certo número real k, seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{ke^{x-1} - k}{x^2 - 1} & \text{se } x > 1 \\ 2x + \log_3(2-x) & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

5.1. Determina o valor de k, sabendo que a função g é contínua.

5.2. Sabe-se que a taxa média de variação da função g no intervalo $[-1, 0]$ é representada por $\log_3 a$, com $a \in \mathbb{R}^+$.

Qual é o valor de a?

(A) 6 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 7

6. Dadas duas funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

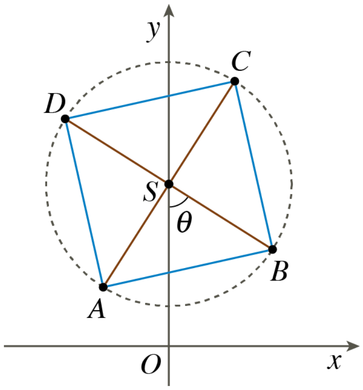
- $f(x) = e^{x+k}$, $k \in \mathbb{R}$
- $g(1) = 1$
- $g'(1) = 2$
- $(f \circ g)'(1) = 6$

Qual é o valor de k?

(A) $3 - \ln(3)$ **(B)** $\ln\left(\dfrac{3}{e}\right)$ **(C)** $\ln(3e)$ **(D)** $\ln(3 - e)$

7. A figura ao lado é uma fotografia de um mecanismo antigo, em madeira, cujo movimento de rotação dos seus quatro braços, no sentido positivo, permite fazer as chamadas meadas de fio de lã.

No referencial o.n. Oxy da figura seguinte está representado um esquema desse mecanismo.



Em relação ao esquema representado na figura, sabe-se que:

- o ponto S pertence ao eixo Oy e é o centro de rotação;
- os pontos A, B, C e D são os vértices de um quadrado inscrito na circunferência de centro S;
- $\overline{OS} = 4$ e $\overline{AB} = 3\sqrt{2}$;
- Para cada posição do ponto B, a amplitude, em radianos, do ângulo OSB é representada por θ.

Seja d a função que faz corresponder a cada valor de θ a distância do ponto B à origem do referencial.

7.1. Mostra que $d(\theta) = \sqrt{25 - 24\cos\theta}$.

Sugestão: Começa por determinar as coordenadas do ponto B, em função de θ.

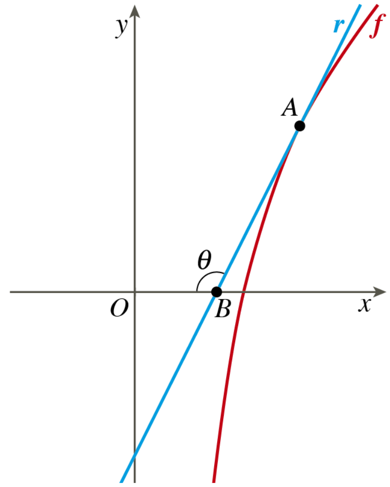
7.2. Determina, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, os valores de θ, pertencentes a $[0, 2\pi]$, para os quais a distância de B a O é maior do que a distância de A a C.

Na tua resposta:

- apresenta uma inequação que te permita resolver o problema;
- reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que te permite(m) resolver a inequação;
- apresenta o resultado na forma de intervalo $]a, b[$, com os valores de a e de b arredondados às milésimas.

8. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=\dfrac{x^2+\ln x}{x}$.

Na figura, em referencial o.n. Oxy, estão representados o gráfico de f e a reta r.



Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao gráfico de f e tem abcissa 1;
- a reta r é tangente ao gráfico de f no ponto A;
- a reta r interseta o eixo Ox no ponto B;
- θ é a amplitude, em radianos, do ângulo ABO.

8.1. O gráfico de f admite uma assíntota oblíqua. Determina uma equação dessa assíntota.

8.2. Qual dos valores seguintes é o valor, arredondado às centésimas, da amplitude, em radianos, do ângulo ABO?

(A) $3,21$ **(B)** $1,11$ **(C)** $2,03$ **(D)** $4,25$

8.3. Seja P o ponto do gráfico de f tal que a reta tangente ao gráfico nesse ponto tem declive mínimo.
Determina a abcissa do ponto P.

9. Considera, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição:

$$|z-1+\mathrm{i}|\le\sqrt{2} \quad \wedge \quad \operatorname{Im}(z)\ge 0$$

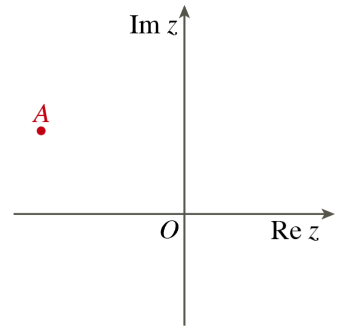
No plano complexo, qual é a medida da área, arredondada às centésimas, da região definida pela condição dada?

(A) $0,79$ **(B)** $1,14$ **(C)** $0,57$ (D) $1,57$

10. Considera, em $\mathbb{C}$, conjunto de números complexos, a equação $z^4 \times \overline{z} = 32\mathrm{i}$.

Na figura está representado, no plano complexo, o ponto A, que é o afixo de um número complexo que é solução da equação dada.

Representa esse número complexo na forma $a+b\mathrm{i}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.



11. Considera a função f, de domínio $[0, 2\pi]$, cuja derivada, f', de domínio $[0, 2\pi]$, é tal que:

$$f'(x) = \sin(2x)\mathrm{e}^{\sin^2 x}$$

Sabe-se que os zeros da segunda derivada de f são as abcissas dos pontos de inflexão do gráfico de f.

Mostra, recorrendo ao Teorema de Bolzano-Cauchy, que o gráfico de f tem pelo menos um ponto de inflexão cuja abcissa pertence ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

FIM

<table>
<tr><th>Pontuações que contribuem obrigatoriamente para a classificação final</th><th colspan="2">1.1.</th><th colspan="3">1.2.</th><th colspan="2">1.3.</th><th colspan="3">7.1.</th><th colspan="3">7.2.</th><th colspan="2">Subtotal</th></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="2">12</td><td colspan="3">14</td><td colspan="2">16</td><td colspan="3">15</td><td colspan="3">15</td><td colspan="2">72</td></tr>
<tr><td>Destes 14 itens, contribuem para a classificação final os 8 itens com melhor classificação</td><td>2.1.</td><td>2.2.</td><td>3.</td><td>4.1.</td><td>4.2.</td><td>5.1</td><td>5.2.</td><td>6.</td><td>8.1.</td><td>8.2.</td><td>8.3.</td><td>9.</td><td>10.</td><td>11.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="13">8×16 pontos</td><td colspan="2">128</td></tr>
<tr><td colspan="14">TOTAL</td><td colspan="2">200</td></tr>
</table>

1.1. O centro da superfície esférica é o ponto médio de $[OV]$.

Seja M o ponto médio de $[OV]$.

O ponto M tem coordenadas $\left(\frac{0+3}{2}, \frac{0+8}{2}, \frac{0+3}{2}\right)$, ou seja, $M\left(\frac{3}{2}, 4, \frac{3}{2}\right)$.

O raio da superfície esférica é igual a $\overline{OM} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 16 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{41}{2}}$.

Equação da superfície esférica: $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-4)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{41}{2}$

1.2. As coordenadas do ponto A são do tipo $(x, 0, 0)$.

Como A pertence ao plano de equação $x + 2y - z = 4$, então $x + 0 - 0 = 4$.

$A(4,0,0)$

$\overrightarrow{OA} = A - O = (4,0,0)$ e $\overrightarrow{OV} = V - O = (3,8,3)$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OV}}\right) = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OV}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OV}\right\|} = \frac{12+0+0}{\sqrt{16+0+0}\sqrt{9+64+9}} = \frac{3}{\sqrt{82}}$$

$$A\hat{O}V = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{82}}\right) \approx 70,653^\circ$$

A amplitude em graus, arredondada às unidades, do ângulo AOV é 71.

1.3. A reta que passa em V e é perpendicular ao plano de equação $x + 2y - z = 4$ interseta-o no ponto C, centro da base do cone.

Uma equação vetorial dessa reta é $(x, y, z) = (3,8,3) + k(1,2,-1)$, $k \in \mathbb{R}$.

As coordenadas do ponto C são do tipo $(3+k, 8+2k, 3-k)$.

Como C pertence ao plano de equação $x + 2y - z = 4$, então $3 + k + 16 + 4k - 3 + k = 4$.

$3 + k + 16 + 4k - 3 + k = 4 \Leftrightarrow 6k = -12 \Leftrightarrow k = -2$

O ponto C tem coordenadas $(1,4,5)$, ou seja, $C(1,4,5)$.

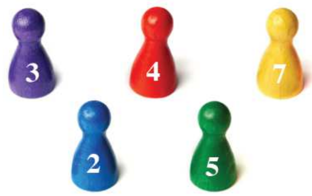
Seja h a altura do cone, em centímetros.

$$h = \overline{VC} = \sqrt{(3-1)^2 + (8-4)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

O volume do cone é dado, em centímetros cúbicos, por $\frac{1}{3} \times 60 \times 2\sqrt{6}$, ou seja, $40\sqrt{6}$.

Como $40\sqrt{6} \approx 97,9796$, conclui-se que o volume do cone, em centímetros cúbicos, arredondado às unidades, é 98.

2.1. Pretende-se determinar $P\left(\overline{B}|A\right)$, ou seja, a probabilidade de a soma dos números retirados ser um número par, sabendo que um deles é 4.



A soma de três números é um número par se:

- os três números forem pares (o que, neste caso, é impossível);
- dois números forem ímpares e um for par.

Como saiu o número 4, para a soma ser par, os outros dois devem ser ímpares.

Assim, o número de casos favoráveis é ${}^{3}C_{2} = 3$.

O número de casos possíveis é ${}^{5}C_{3} = 10$.

Então, $P\left(\overline{B}|A\right) = \frac{3}{10}$.

2.2. O peão azul pode ficar em qualquer uma das cinco posições seguintes:

1) Azul ____ ____ ____ ____

Neste caso, os restantes peões podem ser dispostos de $4!$ maneiras diferentes.

2) ___ Azul ____ ____ ____

Neste caso, o peão vermelho tem 3 possibilidades e os outros têm 3!, ou seja, no total, há $3 \times 3!$ possibilidades.

3) ____ ____ Azul ____ ____

Neste caso, o peão vermelho tem 2 posições disponíveis e os outros peões têm 3!, ou seja, há $2 \times 3!$ possibilidades, ao todo.

4) ____ ____ ____ Azul ____

Neste caso, o peão vermelho tem 1 possibilidade e os outros têm 3!, ou seja, há, ao todo, $1 \times 3!$ possibilidades.

5) ____ ____ ____ ____ Azul

Nesta situação, o peão azul não pode ficar à esquerda do peão vermelho.

O número total de maneiras diferentes de colocar o peão azul à esquerda do peão vermelho é dado por $4!+3\times 3!+2\times 3!+1\times 3!=60$.

Opção (A)

3. Se $P\left(\overline{A\cap B}\right)=0,9$, então $P(A\cap B)=1-0,9=0,1$.

Sabe-se que $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

Como $P(A)=\frac{1}{2}P(A\cup B)$:

$P(A)=\frac{1}{2}\left(P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right)$, ou seja, $2P(A)-P(A)=P(B)-0,1$

Como $P(A)-P(B)=-0,1$, conclui-se que $P(B)>P(A)$.

4.1. Seja S a soma dos 20 termos consecutivos a começar em u_{10}.

$$S=\frac{u_{10}+u_{29}}{2}\times 20=10\times\left(u_{10}+u_{29}\right)$$

Sabe-se que $u_1=-5$ e que a razão da progressão aritmética é 3.

Então, o termo geral é $u_n=-5+(n-1)\times 3=3n-8$.

Assim, $S=10\times\left(u_{10}+u_{29}\right)=10\times(22+79)=1010$.

Opção (A)

4.2. $u_n=-5+(n-1)\times 3=3n-8$

$\lim u_n=\lim(3n-8)=+\infty$

$f(x)=3^{1-x}$

$\lim f(u_n)=\lim 3^{1-u_n}=3^{-\infty}=0$

Opção (D)

5.1. $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{ke^{x-1}-k}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{k\left(e^{x-1}-1\right)}{(x-1)(x+1)}$.

Seja $x-1=y$. Se $x\to 1$, então $y\to 0$.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{k\left(e^{x-1}-1\right)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{y\to 0}\frac{k\left(e^{y}-1\right)}{y(y+2)}=k\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}\times\lim_{y\to 0}\frac{1}{y+2}=k\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{k}{2}$$

$\lim_{x\to 1^-}\left(2x+\log_3(2-x)\right)=2+0=2$

Se a função g é contínua, então $\frac{k}{2}=2$, ou seja, $k=4$.

5.2. A taxa média de variação da função g no intervalo $[-1,0]$ é dada por:

$$\frac{g(0)-g(-1)}{0-(-1)}=\frac{\log_3(2)-(-2+\log_3(3))}{1}=\log_3(2)+1$$

Mas $\log_3(2)+1=\log_3(2)+\log_3(3)=\log_3(2\times 3)=\log_3 6$.

Assim, $a=6$.

Opção (A)

6. $f(x)=\mathrm{e}^{x+k}$

$f'(x)=\left(\mathrm{e}^{x+k}\right)'=\mathrm{e}^{x+k}$

$(f\circ g)'(1)=g'(1)\times f'(g(1))=2\times f'(1)=2\times \mathrm{e}^{1+k}$

$2\mathrm{e}^{1+k}=6\Leftrightarrow \mathrm{e}^{1+k}=3\Leftrightarrow 1+k=\ln(3)\Leftrightarrow k=\ln(3)-1\Leftrightarrow k=\ln(3)-\ln(\mathrm{e})=\ln\left(\frac{3}{\mathrm{e}}\right)$

Opção (B)

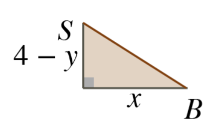
7.1. $S(0,4)$; $\overline{AB}=3\sqrt{2}$

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{SA}^2+\overline{SB}^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2 \overset{\overline{SA}=\overline{SB}}{\Leftrightarrow} 2\overline{SB}^2=18\Leftrightarrow \overline{SB}^2=9$$

Então, $\overline{SB}=3$.

Seja $B(x,y)$.



$\sin\theta=\frac{x}{3}\Leftrightarrow x=3\sin\theta$

$\cos\theta=\frac{4-y}{3}\Leftrightarrow 4-y=3\cos\theta\Leftrightarrow y=4-3\cos\theta$

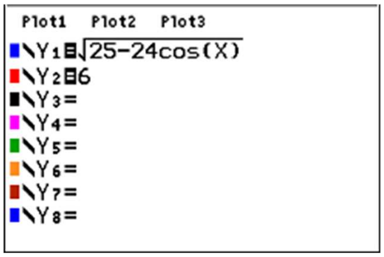
$$\overline{OB}=\sqrt{9\sin^2\theta+(4-3\cos\theta)^2}=\sqrt{9\sin^2\theta+16-24\cos\theta+9\cos^2\theta}=$$

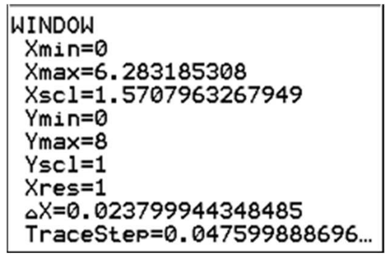
$$=\sqrt{9\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)+16-24\cos\theta}=\sqrt{25-24\cos\theta}$$

Logo, $d(\theta)=\sqrt{25-24\cos\theta}$.

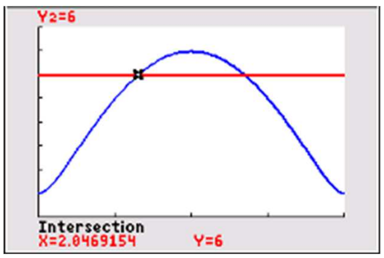
7.2. Pretende-se resolver a inequação $d(\theta) > 6$.

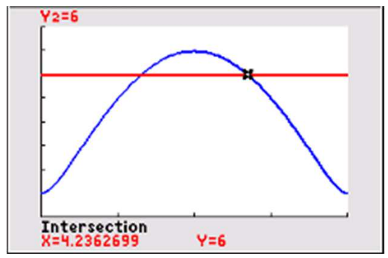
Visualizam-se, na calculadora gráfica, as representações gráficas das funções definidas por $y_1 = \sqrt{25 - 24\cos x}$ e $y_2 = 6$, com $0 \leq x \leq 2\pi$.





Identificam-se os pontos de interseção dos dois gráficos que se visualizam.





Conclui-se que $\theta \in \left]2{,}047\,;\,4{,}236\right[$.

8.1. $f(x) = \dfrac{x^2 + \ln x}{x}$

$y = mx + b$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + \ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x}\right) = 1 + 0 \times 0 = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2 + \ln x}{x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Equação da assíntota ao gráfico de *f*: $y = x$

8.2. $$f'(x) = \left(\frac{x^2 + \ln x}{x}\right)' = \left(x + \frac{\ln x}{x}\right)' = 1 + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = 1 + \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(1) = 1 + \frac{1 - 0}{1} = 2$$

A inclinação da reta *r* é igual a $\pi - \theta$.

$\tan(\pi - \theta) = 2$

$\pi - \theta = \tan^{-1}(2)$

$\pi - \theta \approx 1,1071$

Daqui resulta que $\theta \approx 2,03$.

Opção (C)

8.3. $f'(x) = \left(\dfrac{x^2 + \ln x}{x}\right)' = 1 + \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

$$f''(x) = \left(1 + \frac{1 - \ln x}{x^2}\right)' = \frac{-\frac{1}{x} \times x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-x - 2x + 2x \ln x}{x^4} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3 + 2\ln x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$$

x	0		$e^{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$
f'		↘		↗

A abcissa do ponto P é $e^{\frac{3}{2}}$ (ou $e\sqrt{e}$).

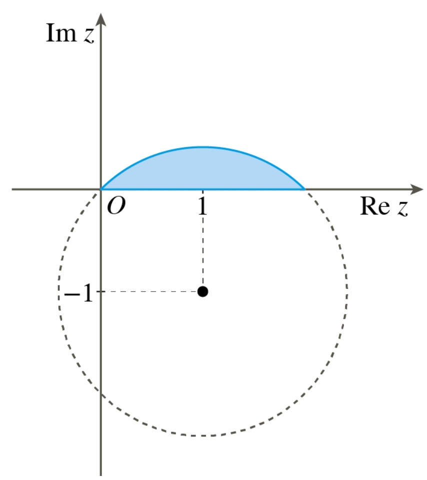
9. $|z - (1 - i)| \le \sqrt{2} \quad \wedge \quad \mathrm{Im}(z) \ge 0$

Na figura está representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido pela condição dada.

A medida da área da região sombreada é:

$$\frac{\pi \times \left(\sqrt{2}\right)^2 - 2^2}{4} = \frac{2\pi - 4}{4} = \frac{\pi - 2}{2} \approx 0,57$$

Opção (C)



10. $z^4 \times \bar{z} = 32i$

Seja $z = \rho e^{i\theta}$.

$$z^4 \times \bar{z} = 32i \Leftrightarrow \left(\rho e^{i\theta}\right)^4 \times \rho e^{i(-\theta)} = 32e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \rho^5 e^{i(3\theta)} = 32e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\begin{cases} \rho^5 = 32 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ , \ k \in \{0,1,2\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = \frac{\pi + 4k\pi}{6} \ , \ k \in \{0,1,2\} \end{cases}$$

A equação tem três soluções. Como o ponto A pertence ao 2.º quadrante, é o afixo do número complexo $z_A = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$.

$z_A = -\sqrt{3} + i$

11. $f'(x) = \sin(2x)e^{\sin^2 x}$

$f''(x) = \left(\sin(2x)e^{\sin^2 x}\right)' = 2\cos(2x)e^{\sin^2 x} + \sin(2x) \times 2\sin x\cos x \times e^{\sin^2 x} =$

$= 2\cos(2x)e^{\sin^2 x} + \sin^2(2x)e^{\sin^2 x} = e^{\sin^2 x}\left(2\cos(2x) + \sin^2(2x)\right)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos(2x) + \sin^2(2x) = 0$

Seja g a função definida por $g(x) = 2\cos(2x) + \sin^2(2x)$:

- a função g é contínua em $\mathbb{R}$, em particular, é contínua em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;
- $g(0) = 2 + 0 = 2$ e $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 + 0 = -2$
- $g\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 < g(0)$

Pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: g(c) = 0$.

Então, existe pelo menos um valor de $c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $f''(c) = 0$, logo, atendendo à informação do enunciado, conclui-se que existe pelo menos um ponto de inflexão do gráfico de *f* cuja abcissa pertence ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.