

Teste N.º 2

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

NÃO É PERMITIDO O USO DE CALCULADORA

10.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: _____ N.º: ____ Turma: ____

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Para um certo valor real de k , considere o polinómio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x + k$.

Considere também as seguintes proposições:

(I) Se $k = -6$, então $P(x)$ é divisível por $x - 1$.

(II) Se $k = 6$, então o resto da divisão de $P(x)$ por $x + 1$ é igual a 12.

Acerca das proposições anteriores, pode concluir-se que:

(A) apenas (I) é verdadeira.

(B) apenas (II) é verdadeira.

(C) são ambas verdadeiras.

(D) são ambas falsas.

2. Seja $p(x)$ uma condição impossível em \mathbb{R} .

Qual das seguintes condições é universal em \mathbb{R} ?

(A) $p(x) \vee x^4 = -1$

(B) $p(x) \wedge x^3 = -1$

(C) $p(x) \vee x^2 \geq 0$

(D) $p(x) \wedge x^2 \geq 0$

3. Numa aula de Matemática, a professora propõe aos alunos o seguinte exercício:

Considere, em \mathbb{R} , as condições:

$$p(x): x^{2017} = 0 \vee (x - 1)(x + 2) = 0$$

$$q(x): x^2 - 2x + 1 = 0$$

Qual das seguintes proposições é verdadeira para todo o x ?

(A) $p(x) \Leftrightarrow q(x)$

(B) $p(x) \Rightarrow q(x)$

(C) $q(x) \Rightarrow p(x)$

Três alunos responderam à questão. O António escolheu a opção (A), o Bernardo escolheu a opção (B) e a Carlota escolheu a opção (C).

Indique, justificando, qual dos alunos tem razão.

4. Sejam p , q e r as proposições:

p : “A Joana gosta de amoras.”

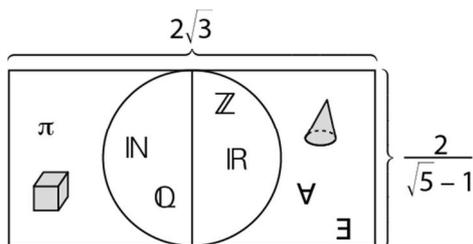
q : “A Joana gosta de framboesas.”

r : “A Joana gosta de mirtilos.”

4.1. Escreva em linguagem corrente a implicação contrarrecíproca da seguinte proposição: “Se a Joana não gosta de amoras, então a Joana gosta de mirtilos”.

4.2. Sabendo que a proposição $\sim(((p \wedge q) \vee r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ é verdadeira, determine quais dos referidos três frutos vermelhos a Joana gosta.

5. O clube de Matemática de uma escola vai participar num concurso e os alunos criaram uma bandeira de apoio ao clube. Essa bandeira tem a forma retangular e contém uma circunferência desenhada cujo diâmetro é igual à largura da bandeira, de acordo com a figura abaixo. As medidas estão expressas em metros.



- 5.1. Determine o valor exato da área da bandeira, apresentando o denominador racionalizado.
 5.2. Determine o valor exato da área do círculo representado na bandeira, apresentando o denominador racionalizado.

6. Considere os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x < 1 \vee x \geq \pi\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 2\}$$

$$C = \mathbb{R}_0^-$$

O conjunto $\overline{A} \setminus (B \cup C)$ é igual a:

- (A) $[2, \pi[$ (B) $[\pi, +\infty[$ (C) $[1, \pi[$ (D) \mathbb{R}^+

7. Considere os seguintes polinómios:

$$A(x) = x^4 + 3x^3 - 10x^2 - 24x$$

$$B(x) = x^2 - 2x$$

$$C(x) = ax^2 + bx + c, \text{ onde } a, b \text{ e } c \text{ são números reais, com } a \neq 0$$

- 7.1. Determine o valor exato de $A(\sqrt{3}) + B(1 - \sqrt{2})$.
 7.2. Determine o quociente e o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $B(x)$.
 7.3. Decomponha o polinómio $A(x)$ num produto de fatores de grau 1, sabendo que -2 é raiz simples do polinómio.
 7.4. Determine o conjunto-solução da condição $A(x) \geq 0$.
 7.5. Determine os valores de a, b e c , sabendo que 3 é uma raiz de multiplicidade 2 do polinómio $C(x)$ e que o resto da divisão de $C(x)$ por $x - 1$ é 6.

8. Considere as proposições:

$$p: \sqrt[3]{\sqrt{4}} = 2^{\frac{1}{3}}$$

$$q: \sqrt{(-3)^2} = -3$$

$$r: \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

Qual das seguintes proposições é verdadeira?

(A) $p \wedge q \wedge r$

(B) $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$

(C) $\sim p \Rightarrow (q \wedge r)$

(D) $p \Leftrightarrow (q \vee \sim r)$

9. A expressão $\frac{x^2}{\sqrt[10]{x^8}}$, com $x > 0$, é igual a:

(A) x^2

(B) $x^{10} \sqrt{x^2}$

(C) $x^{2^{10}} \sqrt{x^8}$

(D) $x^{10} \sqrt{x}$

FIM

COTAÇÕES

Item															
Cotação (em pontos)															
1.	2.	3.	4.1.	4.2.	5.1.	5.2.	6.	7.1.	7.2.	7.3.	7.4.	7.5.	8.	9.	
8	8	20	10	15	15	15	8	15	15	20	20	15	8	8	200

TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

1. Opção (A)

(I) Para $k = -6$, $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ e tem-se que:

$$P(1) = 1^3 - 6 \times 1^2 + 11 \times 1 - 6 = 0, \text{ isto é, } P(x) \text{ é divisível por } x - 1.$$

A afirmação (I) é verdadeira.

(II) Para $k = 6$, $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x + 6$ e tem-se que:

$$P(-1) = (-1)^3 - 6 \times (-1)^2 + 11 \times (-1) + 6 = -12, \text{ isto é, o resto da divisão de } P(x) \text{ por } x + 1 \text{ é } -12.$$

A afirmação (II) é falsa.

2. Opção (C)

A opção (A) apresenta uma condição impossível em \mathbb{R} , visto tratar-se da disjunção de duas condições impossíveis em \mathbb{R} .

Nas opções (B) e (D) encontram-se condições impossíveis em \mathbb{R} , visto em ambas as opções se encontrar uma conjunção de uma condição impossível ($p(x)$) com uma outra condição.

A opção (C) apresenta uma condição universal em \mathbb{R} , pois é a disjunção de uma condição impossível ($p(x)$) com uma condição universal em \mathbb{R} ($x^2 \geq 0$).

3. Seja P o conjunto-solução da condição $p(x)$ e Q o conjunto-solução da condição $q(x)$.

$$x^{2017} = 0 \vee (x - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 1 = 0 \vee x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -2$$

$$P = \{0, 1, -2\}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$Q = \{1\}$$

Como $Q \subset P$, verifica-se que $q(x) \Rightarrow p(x)$ e, portanto, é a Carlota que tem razão.

4.

4.1. "Se a Joana não gosta de mirtilos, então a Joana gosta de amoras".



4.2. Se $\sim((p \wedge q) \vee r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ é verdadeira, então $((p \wedge q) \vee r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ é falsa.

Logo, $(p \wedge q) \vee r$ é verdadeira e $p \Rightarrow r$ é falsa.

Para $p \Rightarrow r$ ser falsa, p terá de ser verdadeira e r terá de ser falsa. Assim, para $(p \wedge q) \vee r$ ser verdadeira, q terá de ser verdadeira.

Concluimos, então, que p e q são verdadeiras e r é falsa, ou seja, a Joana gosta de amoras e framboesas.

5.

$$\begin{aligned} 5.1. A_{\text{retângulo}} &= 2\sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{4\sqrt{3} \times (\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \\ &= \frac{4\sqrt{3} \times (\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = \\ &= \frac{4\sqrt{3} \times (\sqrt{5}+1)}{5-1} = \\ &= \frac{4\sqrt{3} \times (\sqrt{5}+1)}{4} = \\ &= \sqrt{15} + \sqrt{3} \end{aligned}$$

A área da bandeira é $(\sqrt{15} + \sqrt{3}) \text{ m}^2$.

$$5.2. A_{\text{círculo}} = \pi \times r^2, \text{ onde } r = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}-1}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}-1}.$$

Assim:

$$\begin{aligned} A_{\text{círculo}} &= \pi \times \left(\frac{1}{\sqrt{5}-1}\right)^2 = \\ &= \frac{\pi}{(\sqrt{5}-1)^2} = \\ &= \frac{\pi}{(\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} + 1^2} = \\ &= \frac{\pi}{6-2\sqrt{5}} = \\ &= \frac{\pi(6+2\sqrt{5})}{(6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})} = \\ &= \frac{\pi(6+2\sqrt{5})}{6^2 - (2\sqrt{5})^2} = \\ &= \frac{\pi(6+2\sqrt{5})}{36-4 \times 5} = \\ &= \frac{2\pi(3+\sqrt{5})}{16} = \\ &= \frac{\pi(3+\sqrt{5})}{8} \end{aligned}$$

A área do círculo representada na bandeira é $\frac{\pi(3+\sqrt{5})}{8} \text{ m}^2$.

6. Opção (A)

$$A =]-\infty, 1[\cup]\pi, +\infty[\quad B =]-2, 2[\quad C = \mathbb{R}_0^-$$

Assim, $\bar{A} = [1, \pi[$, $B \cup C =]-\infty, 2[$ e $\bar{A} \setminus (B \cup C) = [2, \pi[$

7.

$$\begin{aligned} 7.1. A(\sqrt{3}) + B(1 - \sqrt{2}) &= (\sqrt{3})^4 + 3(\sqrt{3})^3 - 10(\sqrt{3})^2 - 24\sqrt{3} + (1 - \sqrt{2})^2 - 2(1 - \sqrt{2}) = \\ &= 3^2 + 3 \times 3\sqrt{3} - 10 \times 3 - 24\sqrt{3} + 1^2 - 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 - 2 + 2\sqrt{2} = \\ &= 9 + 9\sqrt{3} - 30 - 24\sqrt{3} + 1 - 2\sqrt{2} + 2 - 2 + 2\sqrt{2} = \\ &= -20 - 15\sqrt{3} \end{aligned}$$

7.2.

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 3x^3 - 10x^2 - 24x & x^2 - 2x \\ -x^4 + 2x^3 & \underline{x^2 + 5x} \\ \hline 5x^3 - 10x^2 - 24x & \\ -5x^3 + 10x^2 & \\ \hline & -24x \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = x^2 + 5x$

Resto: $R(x) = -24x$

7.3.

Cálculo auxiliar					
-2	1	3	-12	-24	0
	-2	-2	24	0	
	1	1	-12	0	0

Assim:

$$\begin{aligned} A(x) &= (x + 2)(x^3 + x^2 - 12x) = \\ &= (x + 2) \times x \times (x^2 + x - 12) = \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar
$x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-12)}}{2 \times 1}$
$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{-1+7}{2} \vee x = \frac{-1-7}{2}$
$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -4$
$x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 4)$

$$= (x + 2) \times x \times (x - 3)(x + 4)$$



7.4.

x	$-\infty$	-4		-2		0		3	$+\infty$
x	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$x + 2$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$x + 4$	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$A(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+

$$A(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -4 \vee -2 \leq x \leq 0 \vee x \geq 3$$

$$C.S. =]-\infty, -4] \cup [-2, 0] \cup [3, +\infty[$$

7.5. $C(x) = ax^2 + bx + c$

Como 3 é uma raiz de multiplicidade 2 de $C(x)$, vem que $C(x) = a \times (x - 3)(x - 3)$.

Como o resto da divisão de $C(x)$ por $x - 1$ é 6, tem-se que $C(1) = 6$, isto é:

$$a \times (1 - 3)^2 = 6 \Leftrightarrow a \times 4 = 6$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{6}{4}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$\text{Assim, } C(x) = \frac{3}{2}(x - 3)^2 = \frac{3}{2}(x^2 - 6x + 9) = \frac{3}{2}x^2 - 9x + \frac{27}{2}.$$

$$\text{Tem-se, então, que } a = \frac{3}{2}, b = -9 \text{ e } c = \frac{27}{2}.$$

8. Opção (C)

Tem-se que:

$$p \Leftrightarrow V$$

$$q \Leftrightarrow F$$

$$r \Leftrightarrow V$$

Assim:

$$(A) (p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow (V \wedge F \wedge V) \Leftrightarrow F$$

$$(B) (p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)) \Leftrightarrow (V \Rightarrow (F \Leftrightarrow V))$$

$$\Leftrightarrow (V \Rightarrow F)$$

$$\Leftrightarrow F$$

$$(C) (\sim p \Rightarrow (q \wedge r)) \Leftrightarrow (F \Rightarrow (F \wedge V))$$

$$\Leftrightarrow (F \Rightarrow F)$$

$$\Leftrightarrow V$$

$$(D) (p \Leftrightarrow (q \vee \sim r)) \Leftrightarrow (V \Leftrightarrow (F \vee F))$$

$$\Leftrightarrow (V \Leftrightarrow F)$$

$$\Leftrightarrow F$$

9. Opção (B)

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{\sqrt[10]{x^8}} &= \frac{x^2 \sqrt[10]{x^2}}{\sqrt[10]{x^8} \times \sqrt[10]{x^2}} = \\ &= \frac{x^2 \sqrt[10]{x^2}}{\sqrt[10]{x^{10}}} = \\ &= \frac{x^2 \sqrt[10]{x^2}}{x} = \\ &= x \sqrt[10]{x^2}\end{aligned}$$