



[www.esffranco.edu.pt](http://www.esffranco.edu.pt)

(2023/2024)

# 5.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 8

3.º Período

28/05/2024

Duração: 90 minutos

Nome: \_\_\_\_\_

N.º: \_\_\_\_\_

Classificação:

O professor: \_\_\_\_\_

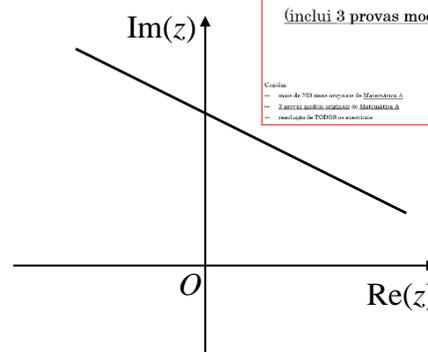
Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleccione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Num grupo constituído por dez homens e oito mulheres, vai ser constituída uma comissão de seis pessoas. O Márcio adora trabalhar com a Simaura. Determine a probabilidade de os dois ficarem juntos (serem ambos escolhidos para a comissão ou nenhum ser escolhido). Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2. Na figura ao lado, está representada uma região do plano complexo. Qual das condições seguintes pode definir, no conjunto dos números complexos  $\mathbb{C}$ , a reta da figura?

- (A)  $z \times \bar{z} = 4$
- (B)  $z \times \bar{z} = 2$
- (C)  $z + \bar{z} = 4 - 4 \operatorname{Im}(z)$
- (D)  $z + \bar{z} = 4 + 4 \operatorname{Im}(z)$



3. Considere, em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, os números  $z_1 = 4i - 4\sqrt{3}$  e  $z_2 = -8i^{38} e^{i\frac{11\pi}{6}}$ . Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

3.1. Verifique se os números  $z_1$  e  $z_2$  são iguais.

3.2. Determine o menor número natural  $n \in \mathbb{N}$  para o qual o número complexo  $\left(\frac{z_1}{-2e^{-i\frac{\pi}{3}}}\right)^n$  é um imaginário puro de coeficiente negativo.

4. No conjunto dos números complexos  $\mathbb{C}$ , sabe-se que, no plano complexo, os afijos dos números  $\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{10}}$  e  $\sqrt{3}e^{i\frac{3\pi}{5}}$  são vértices consecutivos de um polígono regular com centro na origem do referencial.

Qual é a área desse polígono?

- (A) 3                      (B)  $\sqrt{3}$                       (C) 6                      (D)  $\sqrt{6}$

5. Considere, em  $\mathbb{C}$ , a equação  $z^6 = 729$ .

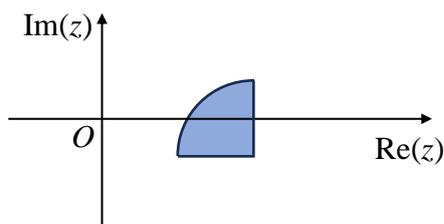
Determine, sem recorrer à calculadora, a solução da equação cujo afixo pertence ao terceiro quadrante.

Apresente o valor pedido na forma  $a + bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ .

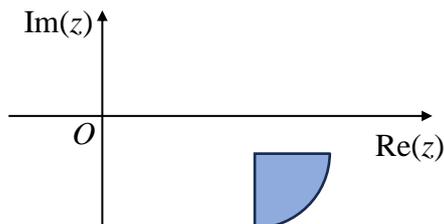
6. Considere, em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, a condição  $|z - 4 + i| \leq 2 \wedge 0 \leq \text{Arg}(z - 4 + i) \leq \frac{\pi}{2}$ .

Em qual das opções seguintes está representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição?

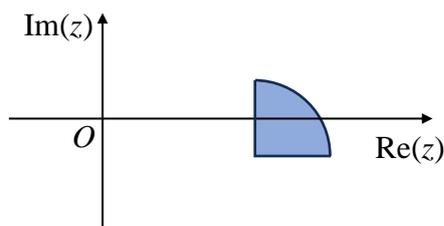
(A)



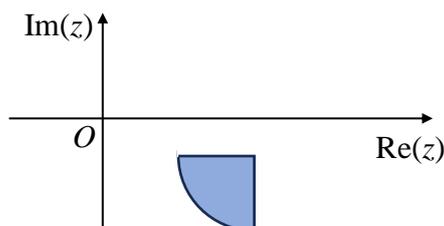
(B)



(C)



(D)

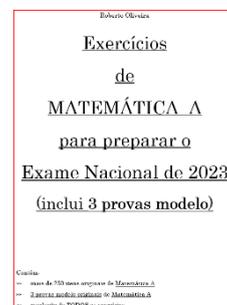


7. Seja  $f$  uma função de domínio  $\mathbb{R}$ .

Sabe-se que  $f'(5) = -3$ .

Qual é o valor de  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{25 - x^2}$ ?

- (A)  $\frac{3}{10}$                       (B)  $-\frac{25}{3}$                       (C)  $\frac{10}{3}$                       (D)  $-\frac{3}{25}$



8. É dada a função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $g(x) = \sin^3(x+e) + ex^2 - e$ .  
Qual é o declive da reta tangente ao gráfico de  $g$  no ponto de abcissa  $-e$ ?

(A)  $2e^2$                       (B)  $-\frac{e^3}{3}$                       (C)  $\frac{e^3}{3}$                       (D)  $-2e^2$

9. Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos \frac{x}{2}}{x-\pi} & \text{se } x < \pi \\ \log_2(x-\pi+8) - \frac{7}{2} & \text{se } x \geq \pi \end{cases}$ .

Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

- 9.1. Para um certo número real  $\alpha$  pertencente a  $]0, \pi[$ , sabe-se que  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Determine  $f(\alpha) \times (\alpha - \pi)$ .

- 9.2. Averigue se a função  $f$  é contínua em  $x = \pi$ .

10. Considere a função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $g(x) = x \ln(3e^{2x} + 4) - 2x^2$ .

O gráfico de  $g$  tem uma assíntota de equação  $y = mx$ .

Sem recorrer à calculadora, determine  $m$ .

11. Seja  $f$  a função, de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , definida por  $f(x) = x^2 e^{\frac{2}{x}}$ .

11.1. Sem recorrer à calculadora, estude o gráfico de  $f$  quanto à existência de assíntotas verticais e, caso estas existam, escreva as respetivas equações.

11.2. Considere a reta  $s$ , secante ao gráfico de  $f$ , nos pontos de abcissas  $a$  e  $2$ , com  $a \in ]0, 2[$ .

Sabe-se que o declive da reta  $s$  é  $5$ .

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de  $a$ .

Na sua resposta:

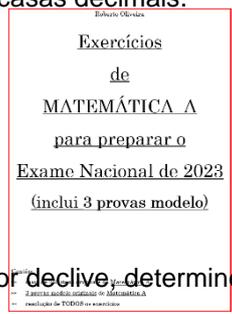
- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação.
- apresente o valor pedido arredondado às décimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

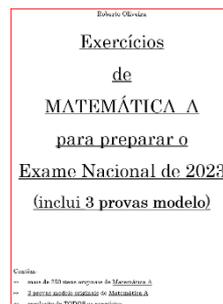
12. Considere a função  $h$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $h(x) = \ln(2x^2 + 8)$ .

Considere ainda a reta  $t$ , tangente ao gráfico de  $h$  no ponto  $P$ .

Sabendo que  $t$  é aquela em que, de todas as retas tangentes ao gráfico de  $h$ , a que tem o maior declive, determine a abcissa de  $P$ .



FIM



**COTAÇÕES**

Item															
Cotação (em pontos)															
1.	2.	3.1.	3.2.	4.	5.	6.	7.	8.	9.1.	9.2.	10.	11.1.	11.2.	12.	200
16	8	16	16	8	16	8	8	8	16	16	16	16	16	16	

**Formulário**

**Trigonometria**

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

**Complexos**

$$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$$

$$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

**Regras de derivação**

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

**Limites notáveis**

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$