Prova-Modelo de Exame

Matemática A

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

12.º Ano de Escolaridade

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3}$ $\times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3}$ $\times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a\ \cos b + \operatorname{sen} b\ \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\ \cos b - \operatorname{sen} a\ \operatorname{sen} b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n\, u^{n-1} u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\, \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

1. Considere todos os números naturais de cinco algarismos que se podem formar.

Destes números, quantos têm exatamente dois algarismos ímpares e iguais?

(A) 2500 **(B)** 3000 **(C)** 5500 **(D)** 6250

2. Seja Ω, conjunto finito, o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Mostre que:

$$P(\overline{A} \mid B) \times P(B) + P(A) - P(B) = 1 - P(\overline{A} \cup B)$$

3. Uma escola secundária tem apenas duas turmas de 12.º ano: o 12X e o 12Y.

Sabe-se que as duas turmas têm o mesmo número de alunos.

Os alunos dessas turmas estão a organizar a viagem de finalistas e ficou decidido que têm de escolher entre apenas dois destinos para essa viagem: Algarve ou Sul de Espanha.

Escolhe-se, ao acaso, um aluno de 12.º ano dessa escola.

Sabe-se que:

- a probabilidade de o aluno preferir como destino o Algarve é 64%;
- um quarto dos alunos que preferem como destino o Algarve é da turma X.

Determine a probabilidade de o aluno escolhido não preferir como destino o Algarve nem ser da turma X. Apresente o resultado na forma de percentagem.

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\left(x - \frac{1}{2}\right)}{-2x^2 + 3x - 1} - \ln 6 & \text{se} \quad x < \dfrac{1}{2} \\ \ln(e^{4x} - 6) & \text{se} \quad x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Resolva os itens **4.1.** e **4.2.** sem recorrer à calculadora.

4.1. Averigue se a função f é contínua em $x = \frac{1}{2}$.

4.2. Em $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ o gráfico de f tem um ponto em que a ordenada é o dobro da abcissa.

Determine as coordenadas desse ponto.

5. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ x \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

* **5.1.** Sabe-se que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa -1 é paralela à reta de equação $y = kx$. Qual é o valor de k?

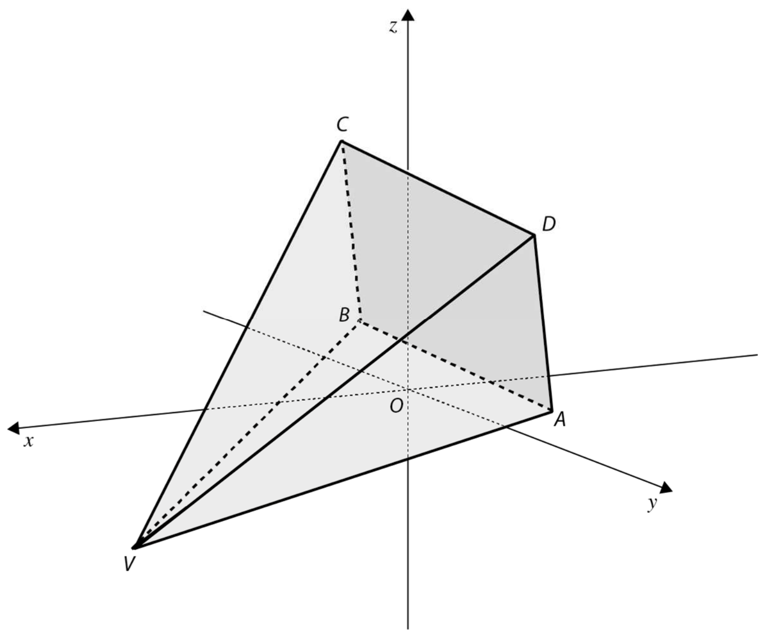
(A) e^{-1} **(B)** $1 - e^{-1}$ **(C)** $1 - e^{-2}$ **(D)** $1 - 2e^{-1}$

5.2. Estude, sem recorrer à calculadora, a função g quanto à existência de assíntotas verticais e horizontais ao seu gráfico e, caso estas existam, escreva as respetivas equações.

* **5.3.** Estude, sem recorrer à calculadora, a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, no intervalo $]0, +\infty[$, e determine esses extremos, caso existam.
Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

6. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide regular de base quadrada $[ABCD]$ e vértice V.
Sabe-se que:

- o plano ABC é definido por $6x + 2y - 3z = -2$;
- o plano CDV é definido por $2x + 2y + 3z = 34$;
- o plano ADV é definido por $6x - 26y + 11z = -142$;
- o ponto B tem coordenadas $(1, -1, 2)$.



* **6.1.** Qual das seguintes equações define um plano perpendicular aos planos ABC e CDV e que passa no ponto B?

(A) $3x - 6y + 2z + 13 = 0$ **(B)** $6x - 12y + 4z - 26 = 0$

(C) $x + 3y + 4z - 6 = 0$ **(D)** $3x + 3y - 4z + 8 = 0$

* **6.2.** Determine a área da base da pirâmide, sem recurso à calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos.

7. Considere, num referencial o.n. Oxy, a circunferência de equação $x^2 + 6x + y^2 - 2y = 15$.

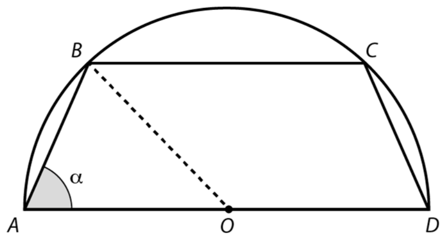
Seja t a reta tangente à circunferência no ponto $T(-6, -3)$.

Determine as coordenadas do ponto da reta t que está mais próximo da origem do referencial.

* **8.** Na figura está representada a semicircunferência de centro O e diâmetro $[AD]$ e o trapézio isósceles $[ABCD]$ inscrito na semicircunferência.

Sabe-se que $\overline{AD} = 10$ cm.

Seja $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ a amplitude, em radianos, do ângulo OAB.



Mostre que a área do trapézio $[ABCD]$, em centímetros quadrados, é dada, para cada valor de α, pela expressão:

$$25\text{sen}(2\alpha) - \frac{25}{2}\text{sen}(4\alpha)$$

* **9.** Seja f a função real de variável real, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \frac{1}{x - \ln x}$.

Seja a um número real positivo e sejam A e B os pontos do gráfico da função f de abcissas a e $2a$, respetivamente, tais que o segmento de reta $[AB]$ é diagonal de um quadrado cujos lados são paralelos aos eixos coordenados.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de a, sabendo que esse valor existe e é único. Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente a(s) coordenada(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às milésimas;
- apresente o valor de a arredondado às milésimas.

* **10.** Seja $a \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

Considere a sucessão convergente (u_n) definida por $u_n = \left(\frac{n+a}{n}\right)^n$.

Em relação a uma certa função f, sabe-se que $\lim f(u_n) = a$.

Em qual das opções seguintes pode estar definida uma expressão analítica de f?

(A) $f(x) = ax$ **(B)** $f(x) = \ln x$ **(C)** $f(x) = a + \frac{1}{x}$ **(D)** $f(x) = a \ln x$

11. Seja (a_n) uma progressão geométrica crescente cujo primeiro termo é 2.

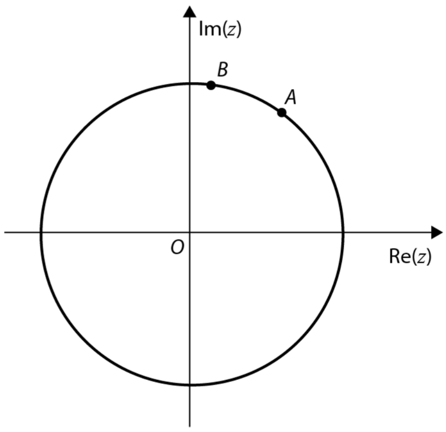
Sabe-se que a_1 , a_2 e $a_3 - 2$ são três termos consecutivos de uma progressão aritmética.

Sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, averigue se 256 é um termo da progressão geométrica (a_n).

12. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

* **12.1.** Na figura estão representados, numa circunferência centrada na origem, os pontos A e B, vértices consecutivos de um polígono regular. Os vértices desse polígono são os afixos das raízes de índice n de um certo número complexo w.

Sabe-se ainda que o ponto A é o afixo do número complexo $z = 3 + 4i$ e que o comprimento do arco AB é igual a $\frac{5\pi}{6}$.



As coordenadas do ponto B são:

(A) $\left(\frac{3\sqrt{3}-4}{2}, \frac{3+4\sqrt{3}}{2}\right)$

(B) $\left(\frac{4\sqrt{3}-3}{2}, \frac{4+3\sqrt{3}}{2}\right)$

(C) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$

(D) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{73}}{2}\right)$

12.2. Seja α um número real tal que $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Sejam $z = 6e^{i\alpha}$ e $w = \frac{1}{3}e^{i\alpha}$.

Sabe-se que $\text{Re}(z \times w) = \frac{1}{4}$.

Sem recorrer à calculadora, determine z na forma algébrica.

13. Seja k um número real não nulo e seja f a função definida por $f(x) = kx^2$.

Considere dois pontos do gráfico de f, A e B, sendo A o de menor abcissa.

Considere, também, o ponto desse gráfico em que a reta tangente ao gráfico é paralela à reta AB.

Mostre que, para qualquer valor de k, as abcissas dos três pontos são termos consecutivos de uma progressão aritmética.

FIM

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td>1.</td><td>3.</td><td>4.1.</td><td>5.1.</td><td>5.3.</td><td>6.1.</td><td>6.2.</td><td>8.</td><td>9.</td><td>10.</td><td>12.1.</td><td>13.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>14</td><td>12</td><td>12</td><td>14</td><td>158</td></tr>
<tr><td>Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td colspan="2">2.</td><td colspan="2">4.2.</td><td colspan="2">5.2.</td><td colspan="2">7.</td><td colspan="2">11.</td><td colspan="2">12.2.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="12">3 × 14 pontos</td><td>42</td></tr>
<tr><td colspan="13">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>

Prova-Modelo de Exame de Matemática A – 12.º ano – Proposta de resolução

1. Opção (C)

Consideremos dois tipos de casos que se excluem mutuamente: começar em ímpar ou começar em par.

$$\underbrace{\_i\_}_{5} \times \underbrace{\_i\_}_{1} \times \underbrace{\_p\_}_{5} \times \underbrace{\_p\_}_{5} \times \underbrace{\_p\_}_{5} \times \underbrace{{}^4C_1}_{\substack{\text{número de maneiras} \\ \text{de colocar o ímpar} \\ \text{que não na} \\ \text{posição inicial}}} +$$

$$+ \underbrace{\overbrace{p}^{2,4,6,8}}_{4} \times \underbrace{\_i\_}_{5} \times \underbrace{\_i\_}_{1} \times \underbrace{\_p\_}_{5} \times \underbrace{\_p\_}_{5} \times \underbrace{{}^4C_2}_{\substack{\text{número de maneiras} \\ \text{de escolher 2 posições} \\ \text{das 4 possíveis para} \\ \text{colocar os ímpares}}}$$

$5^4 \times {}^4C_1 + 4 \times 5^3 \times {}^4C_2 =$

$= 2500 + 3000 =$

$= 5500$

2. $P\left(\overline{A} \mid B\right) \times P(B) + P(A) - P(B) = \frac{P\left(\overline{A} \cap B\right)}{P(B)} \times P(B) + P(A) - P(B) =$

$= P\left(B \cap \overline{A}\right) + P(A) - P(B) =$

$= P(B) - P(A \cap B) + P(A) - P(B) =$

$= P(A) - P(A \cap B) =$

$= P(A \cap \overline{B}) =$

$= P\left(\overline{\overline{A} \cup B}\right) =$

$= 1 - P\left(\overline{A} \cup B\right)$

3. Consideremos os acontecimentos:

X: "O aluno é da turma *X*."

A: "O aluno prefere como destino o Algarve."

Sabemos que:

- $P(X) = P(Y) = 0{,}5$
- $P(A) = 0{,}64$
- $P(X|A) = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Pretende-se determinar $P\left(\overline{A} \cap \overline{X}\right)$.

Tem-se que:

$$P(X|A) = 0{,}25 \Leftrightarrow \frac{P(X \cap A)}{P(A)} = 0{,}25$$

$$\Leftrightarrow P(X \cap A) = 0{,}25 \times 0{,}64$$

$$\Leftrightarrow P(X \cap A) = 0{,}16$$

Assim:

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{X}\right) = P\left(\overline{A \cup X}\right) = 1 - P(A \cup X) =$$

$$= 1 - P(A) - P(X) + P(A \cap X) =$$

$$= 1 - 0{,}64 - 0{,}5 + 0{,}16 =$$

$$= 0{,}02$$

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{X}\right) = 2\%$$

4.

4.1 Para f ser contínua em $x = \frac{1}{2}$ terá de existir $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$, isto é, $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$:

- $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(e^{4 \times \frac{1}{2}} - 6\right) = \ln(e^2 - 6) = \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x)$

- $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \left(\frac{\operatorname{sen}\left(x - \frac{1}{2}\right)}{-2x^2 + 3x - 1} - \ln 6\right) =$

$$= \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{\operatorname{sen}\left(x - \frac{1}{2}\right)}{-2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)} - \ln 6 =$$

$$= \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{\operatorname{sen}\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} \times \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{1}{-2(x-1)} - \ln 6 =$$

Cálculo auxiliar

$$-2x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times (-2) \times (-1)}}{2 \times (-2)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3+1}{-4} \ \vee \ x = \frac{-3-1}{-4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ \vee \ x = 1$$

$$-2x^2 + 3x - 1 = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)$$

Considerando a mudança de variável $x - \frac{1}{2} = y$, $x \to \left(\frac{1}{2}\right)^- \Rightarrow y \to 0^-$:

$$= \underbrace{\lim_{y \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{limite notável}} \times \frac{1}{-2\left(\frac{1}{2} - 1\right)} - \ln 6 =$$

$$= 1 \times 1 - \ln 6 =$$

$$= 1 - \ln 6$$

Como $1 - \ln 6 = \ln e - \ln 6 = \ln\left(\frac{e}{6}\right)$, é diferente de $\ln(e^2 - 6)$, tem-se que

$\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x)$.

Conclui-se, então, que f não é contínua em $x = \frac{1}{2}$.

4.2 Em $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$:

$$f(x) = 2x$$

$\ln(e^{4x}-6)=2x \Leftrightarrow e^{4x}-6=e^{2x}$

$\Leftrightarrow e^{4x}-e^{2x}-6=0$

$\Leftrightarrow (e^{2x})^2-e^{2x}-6=0$

Considerando a mudança de variável $y=e^{2x}$:

$$y^2-y-6=0 \Leftrightarrow y=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-6)}}{2\times1} \Leftrightarrow y=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1+5}{2} \quad \vee \quad y=\frac{1-5}{2}$$

$$\Leftrightarrow y=3 \quad \vee \quad y=-2$$

Assim:

$$e^{2x}=3 \quad \vee \quad \underbrace{e^{2x}=-2}_{\text{equação impossível}} \Leftrightarrow 2x=\ln3 \Leftrightarrow x=\frac{\ln3}{2}\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$$

O ponto do gráfico em que a ordenada é o dobro da abcissa tem coordenadas $\left(\frac{\ln3}{2}, f\left(\frac{\ln3}{2}\right)\right)=\left(\frac{\ln3}{2},\ln3\right)$.

Cálculo auxiliar

$f\left(\frac{\ln3}{2}\right)=\ln\left(e^{\frac{4\ln3}{2}}-6\right)=\ln\left(e^{2\ln3}-6\right)=$

$=\ln\left(e^{\ln9}-6\right)=$

$=\ln(9-6)=$

$=\ln3$

5.

5.1 Opção (D)

O declive da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa -1 é $g'(-1)$. Como a reta é paralela à reta de equação $y=kx$, então $k=g'(-1)$.

Em $]-\infty,0[$, tem-se que:

$$g'(x)=\left(\frac{e^x-1}{x}\right)'=\frac{(e^x-1)'\times x-(e^x-1)\times x'}{x^2}=$$

$$=\frac{e^x\times x-(e^x-1)\times1}{x^2}=$$

$$=\frac{e^x\times x-e^x+1}{x^2}=$$

Assim:

$$k=g'(-1)=\frac{e^{-1}\times(-1)-e^{-1}+1}{(-1)^2}=\frac{-e^{-1}-e^{-1}+1}{1}=1-2e^{-1}$$

5.2 Assíntotas verticais

A função g é contínua em $]-\infty,0[$ e em $]0,+\infty[$, logo a reta de equação $x=0$ é a única candidata a assíntota vertical ao gráfico de g:

- $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0^+\times\ln\left(\frac{1}{0^+}\right)=0^+\times\ln(+\infty)=0\times\infty$ (indeterminação)

  $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=$

  Considerando a mudança de variável $\frac{1}{y}=y$, $x\to0^+\Rightarrow y\to+\infty$:

$$= \underbrace{\lim_{y \to +\infty} \frac{\ln y}{y}}_{\text{limite notável}} =$$

$$= 0$$

- $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \underbrace{\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)}_{\text{limite notável}} = 1$

  O gráfico de g não tem assíntotas verticais.

Assíntotas horizontais

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = +\infty \times \ln\left(\frac{1}{+\infty}\right)$

  $$= +\infty \times \ln(0^+) =$$
  $$= +\infty \times (-\infty) =$$
  $$= -\infty$$

  O gráfico de g não apresenta assíntotas horizontais quando $x \to +\infty$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = \frac{e^{-\infty} - 1}{-\infty} = \frac{0 - 1}{-\infty} = \frac{-1}{-\infty} = 0$

  A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \to -\infty$.

5.3 Em $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = \left(x \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)' =$$
$$= x' \times \ln\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)' =$$
$$= 1 \times \ln\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\frac{1}{x}} =$$
$$= \ln\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} =$$
$$= \ln\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \left(-\frac{1}{x}\right) =$$
$$= \ln\left(\frac{1}{x}\right) - 1$$

$$g'(x) = 0$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = e$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \quad \text{e} \quad \frac{1}{e} \in]0, +\infty[$$

x	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
Sinal de g'	n.d.	$+$	0	$-$
Variação de g	n.d.	$\nearrow$	$g\left(\frac{1}{e}\right)$ Máx.	$\searrow$

Cálculos auxiliares

$g'(e) = \ln\left(\frac{1}{e}\right) - 1 = \ln(e^{-1}) - 1 = -1 - 1 = -2 < 0$

$g'\left(\frac{1}{2e}\right) = \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{2e}}\right) - 1 = \ln(2e) - 1 = \ln 2 + \ln e - 1 = \ln 2 + 1 - 1 = \ln 2 > 0$

$g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{\frac{1}{e}}\right) = \frac{1}{e}\ln(e) = \frac{1}{e} \times 1 = \frac{1}{e}$

g é crescente em $\left]0, \frac{1}{e}\right[$ e é decrescente em $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$; $\frac{1}{e}$ é um máximo (absoluto) para $x = \frac{1}{e}$.

6. $ABC: 6x + 2y - 3z = -2$ — um vetor normal a $ABC: \vec{n}(6, 2, -3)$

$CDV: 2x + 2y + 3z = 34$ — um vetor normal a $CDV: \vec{m}(2, 2, 3)$

$ADV: 6x - 26y + 11z = -142$ — $B(1, -1, 2)$

6.1 Opção (B)

Se dois planos são perpendiculares, então os respetivos vetores normais também o são. Vamos, então, determinar um vetor, não nulo, que seja simultaneamente perpendicular a $\vec{n}$ e a $\vec{m}$:

$$\begin{cases}(a,b,c).(6,2,-3) = 0\\ (a,b,c).(2,2,3) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6a + 2b - 3c = 0\\ 2a + 2b + 3c = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6a + 2b = 3c\\ 3c = -2a - 2b\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}6a + 2b = -2a - 2b\\ \underline{\qquad\qquad}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8a = -4b\\ \underline{\qquad}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a = -\frac{1}{2}b\\ 3c = -2\left(-\frac{1}{2}b\right) - 2b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = -\frac{1}{2}b\\ 3c = b - 2b\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a = -\frac{1}{2}b\\ 3c = -b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = -\frac{1}{2}b\\ c = -\frac{1}{3}b\end{cases}$$

$\left(-\frac{1}{2}b, b, -\frac{1}{3}b\right)$, com $b \in \mathrm{IR}\backslash\{0\}$

$b = 6 \leadsto (-3, 6, -2)$

Um plano perpendicular aos planos ABC e CVD é da forma $-3x + 6y - 2z + d = 0$.

Como $B(1, -1{,}2)$ pertence ao plano, vem que:

$-3 - 6 - 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = 13$

Logo, um plano perpendicular aos planos ABC e CDV, e que passa em B pode ser definido por:

$-3x + 6y - 2z + 13 = 0 \Leftrightarrow 6x - 12y + 4z - 26 = 0$

6.2 AD é a interseção dos planos ABC e ADV.

$$\begin{cases} 6x + 2y - 3z = -2 \\ 6x - 26y + 11z = -142 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = -2 - 2y + 3z \\ -2 - 2y + 3z - 26y + 11z = -142 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z \\ -2y - 26y + 3z + 11z = -140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ -28y = -14z - 140 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}z + 5\right) + \frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{2}z + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} - \frac{1}{6}z - \frac{5}{3} + \frac{1}{2}z \\ \underline{\phantom{x = -\frac{1}{3} - \frac{1}{6}z}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + \frac{1}{3}z \\ y = \frac{1}{2}z + 5 \end{cases}$$

$\left(-2 + \frac{1}{3}z, 5 + \frac{1}{2}z, z\right)$, com $z \in \mathrm{IR}$ é um ponto genérico da reta AD.

$AD: (x, y, z) = (-2, 5, 0) + k\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right), k \in \mathrm{IR}$

D é a interseção da reta AD com o plano CDV.

$D\left(-2 + \frac{1}{3}k, 5 + \frac{1}{2}k, k\right)$, com $k \in \mathrm{IR}$

$$2\left(-2 + \frac{1}{3}k\right) + 2\left(5 + \frac{1}{2}k\right) + 3k = 34 \Leftrightarrow -4 + \frac{2}{3}k + 10 + k + 3k = 34$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}k + \frac{3}{3}k + \frac{9}{3}k = 28$$

$$\Leftrightarrow \frac{14}{3}k = 28$$

$$\Leftrightarrow k = 6$$

$D\left(-2 + \frac{6}{3}, 5 + \frac{6}{2}, 6\right)$

$D(0, 8, 6)$

$\overline{BD} = \sqrt{(0-1)^2 + (8+1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{1 + 81 + 16} = \sqrt{98}$

$\overline{BD}^2 = l^2 + l^2 \Leftrightarrow 98 = 2l^2 \Leftrightarrow 49 = l^2$

$A_{\text{base}} = 49$ u.a.

7. $x^2 + 6x + y^2 - 2y = 15 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 15 + 9 + 1$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-1)^2 = 25$$

Seja C o centro da circunferência: $C(-3, 1)$

Seja $P(x, y)$ um ponto genérico da reta tangente à circunferência no ponto T:

$\overrightarrow{CT} . \overrightarrow{TP} = 0 \Leftrightarrow (-3, -4) . (x + 6, y + 3) = 0 \Leftrightarrow -3x - 18 - 4y - 12 = 0$

$$\Leftrightarrow -4y = 3x + 30$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x - \frac{15}{2}$$

O ponto da reta t que está mais próximo da origem do referencial é a projeção ortogonal de O sobre a reta t. Consideremos a reta perpendicular a t e que passa em O, definida por $y = \frac{4}{3}x$.

Determinemos a interseção desta reta com a reta t:

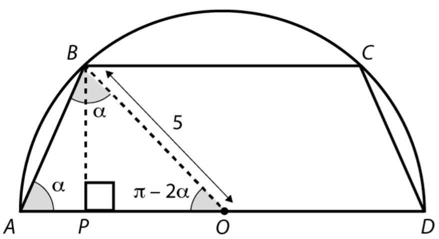
$$\begin{cases} y = \dfrac{4}{3}x \\ y = -\dfrac{3}{4}x - \dfrac{15}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{3}{4}x - \dfrac{15}{2} = \dfrac{4}{3}x \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x - 90 = 16x \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -25x = 90 \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{18}{5} \\ y = -\frac{3}{4} \times \left(-\frac{18}{5}\right) - \frac{15}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{18}{5} \\ y = -\frac{24}{5} \end{cases}$$

As coordenadas são $\left(-\frac{18}{5}, -\frac{24}{5}\right)$.

8. Seja P a projeção ortogonal de B sobre $[AD]$.



$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2} \times \overline{BP} = \frac{10+2\times\overline{OP}}{2} \times \overline{BP}$

Cálculos auxiliares
O triângulo $[AOB]$ é isósceles:
$\overline{OA} = \overline{OB} = \text{raio} = 5$
$\alpha = O\hat{A}B = O\hat{B}A$
$A\hat{O}B = \pi - \alpha - \alpha = \pi - 2\alpha$
$\text{sen}\,(\pi - 2\alpha) = \frac{\overline{BP}}{5} \Leftrightarrow \text{sen}\,(2\alpha) = \frac{\overline{BP}}{5} \Leftrightarrow \overline{BP} = 5\text{sen}\,(2\alpha)$
$\cos(\pi - 2\alpha) = \frac{\overline{OP}}{5} \Leftrightarrow -\cos(2\alpha) = \frac{\overline{OP}}{5} \Leftrightarrow \overline{OP} = -5\cos\,(2\alpha)$

Assim:

$$A_{[ABCD]} = \frac{10+2\times\overline{OP}}{2} \times \overline{BP} = \frac{10+2\times(-5\cos\,(2\alpha))}{2} \times 5\,\text{sen}\,(2\alpha) =$$

$$= \frac{10-10\cos(2\alpha)}{2} \times 5\,\text{sen}\,(2\alpha) =$$

$$= (5 - 5\cos\,(2\alpha)) \times 5\,\text{sen}\,(2\alpha) =$$

$$= 25\,\text{sen}\,(2\alpha) - 25\cos\,(2\alpha)\,\text{sen}\,(2\alpha) =$$

$$= 25\,\text{sen}\,(2\alpha) - \frac{25}{2} \times \underbrace{2\,\text{sen}\,(2\alpha)\cos\,(2\alpha)}_{\text{sen}\,(2\times 2\alpha)} =$$

$$= 25\,\text{sen}\,(2\alpha) - \frac{25}{2} \times \text{sen}\,(4\alpha)$$

9. $f(x) = \frac{1}{x - \ln x}$ $\qquad D_f = \mathbb{R}^+$

$A(a, f(a))$, ou seja, $A\left(a, \frac{1}{a - \ln a}\right)$.

$B(2a, f(2a))$, ou seja, $B\left(2a, \frac{1}{2a - \ln(2a)}\right)$.

O declive da reta AB é igual a $\frac{f(2a) - f(a)}{2a - a} = \frac{\frac{1}{2a - \ln(2a)} - \frac{1}{a - \ln a}}{a}$.

$[AB]$ é uma diagonal de um quadrado de lados paralelos aos eixos coordenados se:

$$\frac{\frac{1}{2a - \ln(2a)} - \frac{1}{a - \ln a}}{a} = 1 \ \vee \ \frac{\frac{1}{2a - \ln(2a)} - \frac{1}{a - \ln a}}{a} = -1$$

isto é:

$$\left| \frac{\frac{1}{2a - \ln(2a)} - \frac{1}{a - \ln a}}{a} \right| = 1$$

ou seja:

$$\frac{\left| \frac{1}{2a - \ln(2a)} - \frac{1}{a - \ln a} \right|}{a} = 1, \text{ pois } a \in \mathbb{R}^+.$$

Utilizando x como variável independente:

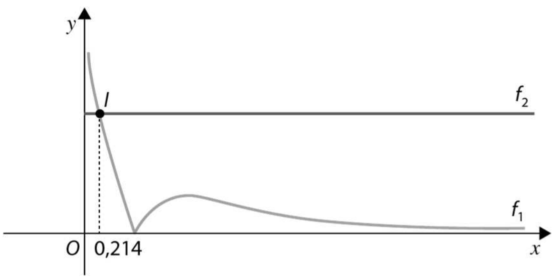
$$\frac{\left| \frac{1}{2x - \ln(2x)} - \frac{1}{x - \ln x} \right|}{x} = 1$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$f_1(x) = \frac{\left| \frac{1}{2x - \ln(2x)} - \frac{1}{x - \ln x} \right|}{x}$

$f_2(x) = 1$

$x > 0$



Logo, $a \approx 0{,}214$.

10. Opção (B)

$u_n = \left(\frac{n+a}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$

$\lim u_n = \lim \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$

Assim, $\lim_{x \to e^a} f(x) = a$.

(A) $\lim\limits_{x\to e^a} f(x) = \lim\limits_{x\to e^a}(ax) = ae^a$ (falso)

(B) $\lim\limits_{x\to e^a} f(x) = \lim\limits_{x\to e^a} \ln x = \ln(e^a) = a$ (verdadeiro)

(C) $\lim\limits_{x\to e^a} f(x) = \lim\limits_{x\to e^a}\left(a + \frac{1}{x}\right) = a + \frac{1}{e^a}$ (falso)

(D) $\lim\limits_{x\to e^a} f(x) = \lim\limits_{x\to e^a}(a\ln x) = a\ln(e^a) = a^2$ (falso)

11. $a_1 = 2$ e (a_n) é uma progressão geométrica crescente, logo, $r > 1$.

$a_1 \quad , \quad a_2 \quad , \quad a_3 - 2$ são termos consecutivos de uma progressão aritmética.

$$a_2 - a_1 = a_3 - 2 - a_2 \Leftrightarrow a_2 - 2 = a_3 - 2 - a_2$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = a_3$$

Por outro lado:

$a_2 = a_1 \times r = 2r$, onde r é a razão da progressão geométrica.

$a_3 = a_1 \times r^2 = 2r^2$

Logo:

$$2 \times 2r = 2r^2 \Leftrightarrow 4r - 2r^2 = 0 \Leftrightarrow r(4 - 2r) = 0$$
$$\Leftrightarrow r = 0 \ \vee \ 4 = 2r$$
$$\Leftrightarrow r = 0 \ \vee \ r = 2$$

Como $r > 1$, então $r = 2$.

Assim, $a_n = a_1 \times r^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$.

Deste modo:

$2^n = 256 \Leftrightarrow 2^n = 2^8 \Leftrightarrow n = 8$

Assim, conclui-se que 256 é o 8.º termo.

12.

12.1 Opção (A)

$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

Logo, 5 é o raio da circunferência de centro na origem e que passa em A e B.

Como o comprimento do arco AB é $\frac{5\pi}{6}$, tem-se:

$\frac{5\pi}{6} = \alpha \times 5 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$

Então, $\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{6}$, logo $n = 12$.

Seja z_B o número complexo cujo afixo é B.

$$z_B = z \times e^{i\frac{\pi}{6}} = (3 + 4i)\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}\right) = (3 + 4i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) =$$
$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i + 2\sqrt{3}i + 2i^2 =$$
$$= -2 + \frac{3}{2}\sqrt{3} + i\left(\frac{3}{2} + 2\sqrt{3}\right) =$$

$= \frac{3\sqrt{3}-4}{2} + i\,\frac{3+4\sqrt{3}}{2}$

Assim, as coordenadas de B são $\left(\frac{3\sqrt{3}-4}{2}, \frac{3+4\sqrt{3}}{2}\right)$.

12.2 $\text{Re}(z \times w) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \text{Re}\left(6e^{i\alpha} \times \frac{1}{3}e^{i\alpha}\right) = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \text{Re}\left(6 \times \frac{1}{3}e^{i(\alpha+\alpha)}\right) = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \text{Re}\left(2e^{i(2\alpha)}\right) = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \text{Re}(2\cos(2\alpha) + 2\text{sen}(2\alpha)i) = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow 2\cos(2\alpha) = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \cos(2\alpha) = \frac{1}{8}$

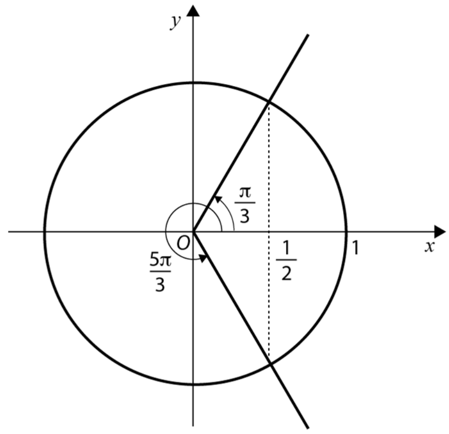
$\Leftrightarrow \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow 2\cos^2\alpha = \frac{9}{8}$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{3}{4}$



Como $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$.

Assim, $\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$, então $\text{sen}\,\alpha = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Como $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, $\text{sen}\,\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$.

$$z = 6e^{i\alpha} \Leftrightarrow z = 6(\cos\alpha + i\text{sen}\alpha) = 6 \times \left(-\frac{3}{4}\right) + 6 \times \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)i = -\frac{9}{2} - \frac{3\sqrt{7}}{2}i$$

13. Como os pontos A e B pertencem ao gráfico de f, sendo A o de menor abcissa, então $A(a, ka^2)$ e $B(b, kb^2)$, com $a < b$.

Seja $C(c, kc^2)$, o ponto desse gráfico em que a reta tangente ao gráfico é paralela à reta AB.

Seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto C e m_t o seu declive.

Tem-se que $m_t = f'(c)$ e $m_t = m_{AB}$.

$f'(x) = 2kx$, logo $f'(c) = 2kc$.

$$m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{kb^2 - ka^2}{b - a} = \frac{k(b^2 - a^2)}{b - a} = \frac{k(b-a)(b+a)}{b - a} = k(b + a)$$

$m_t = f'(c) = 2kc$

Assim:

$k(b+a)=2kc \overset{k\neq 0}{\Leftrightarrow} b+a=2c \Leftrightarrow c=\frac{b+a}{2}$

Provemos agora que:

i. $a<c<b$

$$a<b \Leftrightarrow a+a<b+a \Leftrightarrow \frac{a+a}{2}<\frac{b+a}{2} \Leftrightarrow a<c$$

$$a<b \Leftrightarrow a+b<b+b \Leftrightarrow \frac{a+b}{2}<\frac{b+b}{2} \Leftrightarrow c<b$$

ii. $c-a=b-c$

$$c-a=\frac{b+a}{2}-a=\frac{b-a}{2}$$

$$b-c=b-\frac{b+a}{2}=\frac{b-a}{2}$$

Logo, para qualquer valor de k, as abcissas dos três pontos são termos consecutivos de uma progressão aritmética.

Prova-Modelo de Exame de Matemática A – 12.º ano – Proposta de resolução

1. Opção (C)

Consideremos dois tipos de casos que se excluem mutuamente: começar em ímpar ou começar em par.

$$\underbrace{\_i\_}_{5} \times \underbrace{\_i\_}_{1} \times \underbrace{\_p\_}_{5} \times \underbrace{\_p\_}_{5} \times \underbrace{\_p\_}_{5} \times \underbrace{{}^4C_1}_{\substack{\text{número de maneiras}\\ \text{de colocar o ímpar}\\ \text{que não na}\\ \text{posição inicial}}} +$$

$$+ \underbrace{\overbrace{p}^{2,4,6,8}}_{4} \times \underbrace{\_i\_}_{5} \times \underbrace{\_i\_}_{1} \times \underbrace{\_p\_}_{5} \times \underbrace{\_p\_}_{5} \times \underbrace{{}^4C_2}_{\substack{\text{número de maneiras}\\ \text{de escolher 2 posições}\\ \text{das 4 possíveis para}\\ \text{colocar os ímpares}}}$$

$5^4 \times {}^4C_1 + 4 \times 5^3 \times {}^4C_2 =$

$= 2500 + 3000 =$

$= 5500$

2. $P\left(\overline{A} |\, B\right) \times P(B) + P(A) - P(B) = \frac{P\left(\overline{A} \cap B\right)}{P(B)} \times P(B) + P(A) - P(B) =$

$= P\left(B \cap \overline{A}\right) + P(A) - P(B) =$

$= P(B) - P(A \cap B) + P(A) - P(B) =$

$= P(A) - P(A \cap B) =$

$= P(A \cap \overline{B}) =$

$= P\left(\overline{\overline{A} \cup B}\right) =$

$= 1 - P\left(\overline{A} \cup B\right)$

3. Consideremos os acontecimentos:

X: "O aluno é da turma *X*."

A: "O aluno prefere como destino o Algarve."

Sabemos que:

- $P(X) = P(Y) = 0{,}5$
- $P(A) = 0{,}64$
- $P(X|A) = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Pretende-se determinar $P\left(\overline{A} \cap \overline{X}\right)$.

Tem-se que:

$$P(X|A) = 0{,}25 \Leftrightarrow \frac{P(X \cap A)}{P(A)} = 0{,}25$$

$$\Leftrightarrow P(X \cap A) = 0{,}25 \times 0{,}64$$

$$\Leftrightarrow P(X \cap A) = 0{,}16$$

Assim:

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{X}\right) = P\left(\overline{A \cup X}\right) = 1 - P(A \cup X) =$$

$$= 1 - P(A) - P(X) + P(A \cap X) =$$

$$= 1 - 0{,}64 - 0{,}5 + 0{,}16 =$$

$$= 0{,}02$$

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{X}\right) = 2\%$$

4.

4.1 Para f ser contínua em $x = \frac{1}{2}$ terá de existir $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$, isto é, $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$:

- $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(e^{4 \times \frac{1}{2}} - 6\right) = \ln(e^2 - 6) = \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x)$

- $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \left(\frac{\operatorname{sen}\left(x - \frac{1}{2}\right)}{-2x^2 + 3x - 1} - \ln 6\right) =$

$$= \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{\operatorname{sen}\left(x - \frac{1}{2}\right)}{-2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1)} - \ln 6 =$$

$$= \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{\operatorname{sen}\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} \times \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{1}{-2(x-1)} - \ln 6 =$$

Cálculo auxiliar

$$-2x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times (-2) \times (-1)}}{2 \times (-2)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{-4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 + 1}{-4} \ \vee \ x = \frac{-3 - 1}{-4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ \vee \ x = 1$$

$$-2x^2 + 3x - 1 = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1)$$

Considerando a mudança de variável $x - \frac{1}{2} = y$, $x \to \left(\frac{1}{2}\right)^- \Rightarrow y \to 0^-$:

$$= \underbrace{\lim_{y \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{limite notável}} \times \frac{1}{-2\left(\frac{1}{2} - 1\right)} - \ln 6 =$$

$$= 1 \times 1 - \ln 6 =$$

$$= 1 - \ln 6$$

Como $1 - \ln 6 = \ln e - \ln 6 = \ln\left(\frac{e}{6}\right)$, é diferente de $\ln(e^2 - 6)$, tem-se que

$\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x)$.

Conclui-se, então, que f não é contínua em $x = \frac{1}{2}$.

4.2 Em $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$:

$$f(x) = 2x$$

$\ln(e^{4x}-6)=2x \Leftrightarrow e^{4x}-6=e^{2x}$

$\Leftrightarrow e^{4x}-e^{2x}-6=0$

$\Leftrightarrow (e^{2x})^2-e^{2x}-6=0$

Considerando a mudança de variável $y=e^{2x}$:

$$y^2-y-6=0 \Leftrightarrow y=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-6)}}{2\times1} \Leftrightarrow y=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1+5}{2} \quad \vee \quad y=\frac{1-5}{2}$$

$$\Leftrightarrow y=3 \quad \vee \quad y=-2$$

Assim:

$$e^{2x}=3 \quad \vee \quad \underbrace{e^{2x}=-2}_{\text{equação impossível}} \Leftrightarrow 2x=\ln 3 \Leftrightarrow x=\frac{\ln 3}{2}\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$$

O ponto do gráfico em que a ordenada é o dobro da abcissa tem coordenadas $\left(\frac{\ln 3}{2}, f\left(\frac{\ln 3}{2}\right)\right)=\left(\frac{\ln 3}{2},\ln 3\right)$.

Cálculo auxiliar

$f\left(\frac{\ln 3}{2}\right)=\ln\left(e^{\frac{4\ln 3}{2}}-6\right)=\ln\left(e^{2\ln 3}-6\right)=$

$=\ln\left(e^{\ln 9}-6\right)=$

$=\ln(9-6)=$

$=\ln 3$

5.

5.1 Opção (D)

O declive da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa -1 é $g'(-1)$. Como a reta é paralela à reta de equação $y=kx$, então $k=g'(-1)$.

Em $]-\infty,0[$, tem-se que:

$$g'(x)=\left(\frac{e^x-1}{x}\right)'=\frac{(e^x-1)'\times x-(e^x-1)\times x'}{x^2}=$$

$$=\frac{e^x\times x-(e^x-1)\times 1}{x^2}=$$

$$=\frac{e^x\times x-e^x+1}{x^2}=$$

Assim:

$$k=g'(-1)=\frac{e^{-1}\times(-1)-e^{-1}+1}{(-1)^2}=\frac{-e^{-1}-e^{-1}+1}{1}=1-2e^{-1}$$

5.2 Assíntotas verticais

A função g é contínua em $]-\infty,0[$ e em $]0,+\infty[$, logo a reta de equação $x=0$ é a única candidata a assíntota vertical ao gráfico de g:

- $\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0^+\times\ln\left(\frac{1}{0^+}\right)=0^+\times\ln(+\infty)=0\times\infty$ (indeterminação)

  $\lim_{x\to 0^+}\left(x\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=$

  Considerando a mudança de variável $\frac{1}{y}=y$, $x\to 0^+ \Rightarrow y\to+\infty$:

$$= \underbrace{\lim_{y \to +\infty} \frac{\ln y}{y}}_{\text{limite notável}} =$$

$$= 0$$

- $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \underbrace{\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)}_{\text{limite notável}} = 1$

  O gráfico de g não tem assíntotas verticais.

Assíntotas horizontais

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = +\infty \times \ln\left(\frac{1}{+\infty}\right)$

  $$= +\infty \times \ln(0^+) =$$

  $$= +\infty \times (-\infty) =$$

  $$= -\infty$$

  O gráfico de g não apresenta assíntotas horizontais quando $x \to +\infty$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = \frac{e^{-\infty} - 1}{-\infty} = \frac{0-1}{-\infty} = \frac{-1}{-\infty} = 0$

  A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \to -\infty$.

5.3 Em $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = \left(x \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)' =$$

$$= x' \times \ln\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)' =$$

$$= 1 \times \ln\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \ln\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \ln\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \left(-\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{1}{x}\right) - 1$$

$g'(x) = 0$

$\ln\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = e$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$ e $\frac{1}{e} \in]0, +\infty[$

x	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
Sinal de g'	n.d.	$+$	0	$-$
Variação de g	n.d.	$\nearrow$	$g\left(\frac{1}{e}\right)$ Máx.	$\searrow$

Cálculos auxiliares

$g'(e) = \ln\left(\frac{1}{e}\right) - 1 = \ln(e^{-1}) - 1 = -1 - 1 = -2 < 0$

$g'\left(\frac{1}{2e}\right) = \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{2e}}\right) - 1 = \ln(2e) - 1 = \ln 2 + \ln e - 1 = \ln 2 + 1 - 1 = \ln 2 > 0$

$g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{\frac{1}{e}}\right) = \frac{1}{e}\ln(e) = \frac{1}{e} \times 1 = \frac{1}{e}$

g é crescente em $\left]0, \frac{1}{e}\right[$ e é decrescente em $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$; $\frac{1}{e}$ é um máximo (absoluto) para $x = \frac{1}{e}$.

6. $ABC: 6x + 2y - 3z = -2$ um vetor normal a $ABC: \vec{n}(6, 2, -3)$

$CDV: 2x + 2y + 3z = 34$ um vetor normal a $CDV: \vec{m}(2, 2, 3)$

$ADV: 6x - 26y + 11z = -142$ $B(1, -1, 2)$

6.1 Opção (B)

Se dois planos são perpendiculares, então os respetivos vetores normais também o são. Vamos, então, determinar um vetor, não nulo, que seja simultaneamente perpendicular a $\vec{n}$ e a $\vec{m}$:

$$\begin{cases} (a,b,c).(6,2,-3) = 0 \\ (a,b,c).(2,2,3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 2b - 3c = 0 \\ 2a + 2b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 2b = 3c \\ 3c = -2a - 2b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 2b = -2a - 2b \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a = -4b \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2}b \\ 3c = -2\left(-\frac{1}{2}b\right) - 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2}b \\ 3c = b - 2b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2}b \\ 3c = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2}b \\ c = -\frac{1}{3}b \end{cases}$$

$\left(-\frac{1}{2}b, b, -\frac{1}{3}b\right)$, com $b \in \mathrm{IR}\backslash\{0\}$

$b = 6 \curvearrowright (-3, 6, -2)$

Um plano perpendicular aos planos ABC e CVD é da forma $-3x + 6y - 2z + d = 0$.

Como $B(1, -1{,}2)$ pertence ao plano, vem que:

$-3 - 6 - 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = 13$

Logo, um plano perpendicular aos planos ABC e CDV, e que passa em B pode ser definido por:

$-3x + 6y - 2z + 13 = 0 \Leftrightarrow 6x - 12y + 4z - 26 = 0$

6.2 AD é a interseção dos planos ABC e ADV.

$$\begin{cases} 6x + 2y - 3z = -2 \\ 6x - 26y + 11z = -142 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = -2 - 2y + 3z \\ -2 - 2y + 3z - 26y + 11z = -142 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z \\ -2y - 26y + 3z + 11z = -140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ -28y = -14z - 140 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}z + 5\right) + \frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{2}z + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} - \frac{1}{6}z - \frac{5}{3} + \frac{1}{2}z \\ \underline{} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + \frac{1}{3}z \\ y = \frac{1}{2}z + 5 \end{cases}$$

$\left(-2 + \frac{1}{3}z, 5 + \frac{1}{2}z, z\right)$, com $z \in \text{IR}$ é um ponto genérico da reta AD.

$AD: (x, y, z) = (-2, 5, 0) + k\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right), k \in \text{IR}$

D é a interseção da reta AD com o plano CDV.

$D\left(-2 + \frac{1}{3}k, 5 + \frac{1}{2}k, k\right)$, com $k \in \text{IR}$

$$2\left(-2 + \frac{1}{3}k\right) + 2\left(5 + \frac{1}{2}k\right) + 3k = 34 \Leftrightarrow -4 + \frac{2}{3}k + 10 + k + 3k = 34$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}k + \frac{3}{3}k + \frac{9}{3}k = 28$$

$$\Leftrightarrow \frac{14}{3}k = 28$$

$$\Leftrightarrow k = 6$$

$D\left(-2 + \frac{6}{3}, 5 + \frac{6}{2}, 6\right)$

$D(0, 8, 6)$

$\overline{BD} = \sqrt{(0-1)^2 + (8+1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{1 + 81 + 16} = \sqrt{98}$

$\overline{BD}^2 = l^2 + l^2 \Leftrightarrow 98 = 2l^2 \Leftrightarrow 49 = l^2$

$A_{\text{base}} = 49$ u.a.

7. $x^2 + 6x + y^2 - 2y = 15 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 15 + 9 + 1$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-1)^2 = 25$$

Seja C o centro da circunferência: $C(-3, 1)$

Seja $P(x, y)$ um ponto genérico da reta tangente à circunferência no ponto T:

$\overrightarrow{CT}.\overrightarrow{TP} = 0 \Leftrightarrow (-3, -4).(x + 6, y + 3) = 0 \Leftrightarrow -3x - 18 - 4y - 12 = 0$

$$\Leftrightarrow -4y = 3x + 30$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x - \frac{15}{2}$$

O ponto da reta t que está mais próximo da origem do referencial é a projeção ortogonal de O sobre a reta t. Consideremos a reta perpendicular a t e que passa em O, definida por $y=\frac{4}{3}x$.

Determinemos a interseção desta reta com a reta t:

$$\begin{cases} y=\frac{4}{3}x \\ y=-\frac{3}{4}x-\frac{15}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{4}x-\frac{15}{2}=\frac{4}{3}x \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x-90=16x \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -25x=90 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

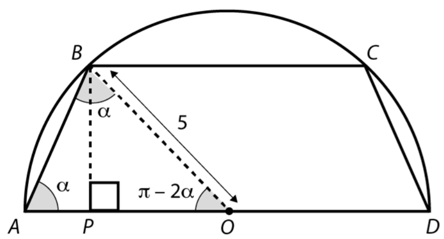
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{18}{5} \\ y=-\frac{3}{4}\times\left(-\frac{18}{5}\right)-\frac{15}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{18}{5} \\ y=-\frac{24}{5} \end{cases}$$

As coordenadas são $\left(-\frac{18}{5},-\frac{24}{5}\right)$.

8. Seja P a projeção ortogonal de B sobre $[AD]$.

$A_{[ABCD]}=\frac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}\times\overline{BP}=\frac{10+2\times\overline{OP}}{2}\times\overline{BP}$



Cálculos auxiliares

O triângulo $[AOB]$ é isósceles:

$\overline{OA}=\overline{OB}=\text{raio}=5$

$\alpha=O\hat{A}B=O\hat{B}A$

$A\hat{O}B=\pi-\alpha-\alpha=\pi-2\alpha$

$\text{sen}\,(\pi-2\alpha)=\frac{\overline{BP}}{5}\Leftrightarrow \text{sen}\,(2\alpha)=\frac{\overline{BP}}{5}\Leftrightarrow \overline{BP}=5\text{sen}\,(2\alpha)$

$\cos(\pi-2\alpha)=\frac{\overline{OP}}{5}\Leftrightarrow -\cos(2\alpha)=\frac{\overline{OP}}{5}\Leftrightarrow \overline{OP}=-5\cos\,(2\alpha)$

Assim:

$$\begin{aligned} A_{[ABCD]}=\frac{10+2\times\overline{OP}}{2}\times\overline{BP}&=\frac{10+2\times(-5\cos\,(2\alpha))}{2}\times 5\,\text{sen}\,(2\alpha)= \\ &=\frac{10-10\cos(2\alpha)}{2}\times 5\,\text{sen}\,(2\alpha)= \\ &=\left(5-5\cos\,(2\alpha)\right)\times 5\,\text{sen}\,(2\alpha)= \\ &=25\,\text{sen}\,(2\alpha)-25\cos\,(2\alpha)\,\text{sen}\,(2\alpha)= \\ &=25\,\text{sen}\,(2\alpha)-\frac{25}{2}\times\underbrace{2\,\text{sen}\,(2\alpha)\cos\,(2\alpha)}_{\text{sen}\,(2\times 2\alpha)}= \\ &=25\,\text{sen}\,(2\alpha)-\frac{25}{2}\times\text{sen}\,(4\alpha) \end{aligned}$$

9. $f(x)=\frac{1}{x-\ln x}$ $\qquad D_f=\mathbb{R}^+$

$A\big(a,f(a)\big)$, ou seja, $A\left(a,\frac{1}{a-\ln a}\right)$.

$B\big(2a,f(2a)\big)$, ou seja, $B\left(2a,\frac{1}{2a-\ln(2a)}\right)$.

O declive da reta AB é igual a $\frac{f(2a)-f(a)}{2a-a}=\frac{\frac{1}{2a-\ln(2a)}-\frac{1}{a-\ln a}}{a}$.

$[AB]$ é uma diagonal de um quadrado de lados paralelos aos eixos coordenados se:

$$\frac{\frac{1}{2a-\ln(2a)}-\frac{1}{a-\ln a}}{a}=1 \ \vee \ \frac{\frac{1}{2a-\ln(2a)}-\frac{1}{a-\ln a}}{a}=-1$$

isto é:

$$\left|\frac{\frac{1}{2a-\ln(2a)}-\frac{1}{a-\ln a}}{a}\right|=1$$

ou seja:

$$\frac{\left|\frac{1}{2a-\ln(2a)}-\frac{1}{a-\ln a}\right|}{a}=1\text{, pois } a\in\mathbb{R}^+.$$

Utilizando x como variável independente:

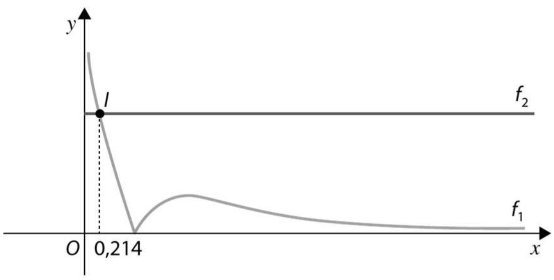
$$\frac{\left|\frac{1}{2x-\ln(2x)}-\frac{1}{x-\ln x}\right|}{x}=1$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$f_1(x)=\frac{\left|\frac{1}{2x-\ln(2x)}-\frac{1}{x-\ln x}\right|}{x}$

$f_2(x)=1$

$x>0$



Logo, $a\approx 0{,}214$.

10. Opção (B)

$u_n=\left(\frac{n+a}{n}\right)^n=\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$

$\lim u_n=\lim\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a$

Assim, $\lim\limits_{x\to e^a} f(x)=a$.

(A) $\lim\limits_{x\to e^a} f(x) = \lim\limits_{x\to e^a}(ax) = ae^a$ (falso)

(B) $\lim\limits_{x\to e^a} f(x) = \lim\limits_{x\to e^a} \ln x = \ln(e^a) = a$ (verdadeiro)

(C) $\lim\limits_{x\to e^a} f(x) = \lim\limits_{x\to e^a}\left(a + \frac{1}{x}\right) = a + \frac{1}{e^a}$ (falso)

(D) $\lim\limits_{x\to e^a} f(x) = \lim\limits_{x\to e^a}(a\ln x) = a\ln(e^a) = a^2$ (falso)

11. $a_1 = 2$ e (a_n) é uma progressão geométrica crescente, logo, $r > 1$.

a_1 , a_2 , $a_3 - 2$ são termos consecutivos de uma progressão aritmética.

$a_2 - a_1 = a_3 - 2 - a_2 \Leftrightarrow a_2 - 2 = a_3 - 2 - a_2$

$\Leftrightarrow 2a_2 = a_3$

Por outro lado:

$a_2 = a_1 \times r = 2r$, onde r é a razão da progressão geométrica.

$a_3 = a_1 \times r^2 = 2r^2$

Logo:

$2 \times 2r = 2r^2 \Leftrightarrow 4r - 2r^2 = 0 \Leftrightarrow r(4 - 2r) = 0$

$\Leftrightarrow r = 0 \ \vee \ 4 = 2r$

$\Leftrightarrow r = 0 \ \vee \ r = 2$

Como $r > 1$, então $r = 2$.

Assim, $a_n = a_1 \times r^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$.

Deste modo:

$2^n = 256 \Leftrightarrow 2^n = 2^8 \Leftrightarrow n = 8$

Assim, conclui-se que 256 é o 8.º termo.

12.

12.1 Opção (A)

$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

Logo, 5 é o raio da circunferência de centro na origem e que passa em A e B.

Como o comprimento do arco AB é $\frac{5\pi}{6}$, tem-se:

$\frac{5\pi}{6} = \alpha \times 5 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$

Então, $\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{6}$, logo $n = 12$.

Seja z_B o número complexo cujo afixo é B.

$z_B = z \times e^{i\frac{\pi}{6}} = (3 + 4i)\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = (3 + 4i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) =$

$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i + 2\sqrt{3}i + 2i^2 =$

$= -2 + \frac{3}{2}\sqrt{3} + i\left(\frac{3}{2} + 2\sqrt{3}\right) =$

$$= \frac{3\sqrt{3}-4}{2} + i\,\frac{3+4\sqrt{3}}{2}$$

Assim, as coordenadas de B são $\left(\frac{3\sqrt{3}-4}{2}, \frac{3+4\sqrt{3}}{2}\right)$.

12.2 $\mathrm{Re}(z \times w) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(6e^{i\alpha} \times \frac{1}{3}e^{i\alpha}\right) = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(6 \times \frac{1}{3}e^{i(\alpha+\alpha)}\right) = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(2e^{i(2\alpha)}\right) = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(2\cos(2\alpha) + 2\mathrm{sen}(2\alpha)i) = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow 2\cos(2\alpha) = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \cos(2\alpha) = \frac{1}{8}$

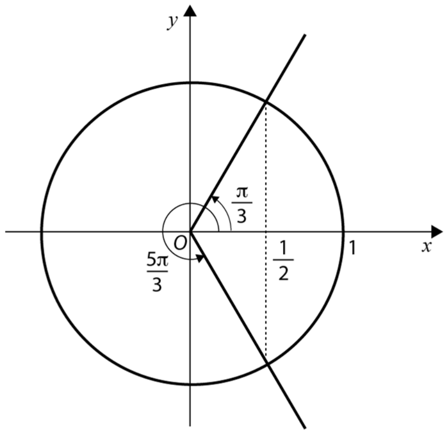
$\Leftrightarrow \cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha = \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow 2\cos^2\alpha = \frac{9}{8}$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{3}{4}$



Como $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$.

Assim, $\mathrm{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$, então $\mathrm{sen}\,\alpha = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Como $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, $\mathrm{sen}\,\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$.

$$z = 6e^{i\alpha} \Leftrightarrow z = 6(\cos\alpha + i\mathrm{sen}\alpha) = 6 \times \left(-\frac{3}{4}\right) + 6 \times \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)i = -\frac{9}{2} - \frac{3\sqrt{7}}{2}i$$

13. Como os pontos A e B pertencem ao gráfico de f, sendo A o de menor abcissa, então $A(a, ka^2)$ e $B(b, kb^2)$, com $a < b$.

Seja $C(c, kc^2)$, o ponto desse gráfico em que a reta tangente ao gráfico é paralela à reta AB.

Seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto C e m_t o seu declive.

Tem-se que $m_t = f'(c)$ e $m_t = m_{AB}$.

$f'(x) = 2kx$, logo $f'(c) = 2kc$.

$$m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{kb^2 - ka^2}{b - a} = \frac{k(b^2 - a^2)}{b - a} = \frac{k(b-a)(b+a)}{b - a} = k(b + a)$$

$m_t = f'(c) = 2kc$

Assim:

$k(b+a) = 2kc \overset{k\neq 0}{\Leftrightarrow} b+a = 2c \Leftrightarrow c = \frac{b+a}{2}$

Provemos agora que:

i. $a < c < b$

$$a < b \Leftrightarrow a + a < b + a \Leftrightarrow \frac{a+a}{2} < \frac{b+a}{2} \Leftrightarrow a < c$$

$$a < b \Leftrightarrow a + b < b + b \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} \Leftrightarrow c < b$$

ii. $c - a = b - c$

$$c - a = \frac{b+a}{2} - a = \frac{b-a}{2}$$

$$b - c = b - \frac{b+a}{2} = \frac{b-a}{2}$$

Logo, para qualquer valor de k, as abcissas dos três pontos são termos consecutivos de uma progressão aritmética.