Novo Espaço – Matemática A 11.º ano

Proposta de teste de avaliação [fevereiro – 2020]

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

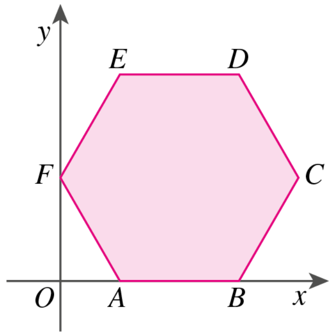
1. Na figura está representado, num referencial o.n. Oxy, um hexágono regular.

Sabe-se que:

. os pontos A e B pertencem ao semieixo positivo Ox;

. o ponto F pertence ao semieixo positivo Oy;

. $\overline{AB} = 2$



Determina:

1.1. a equação reduzida da reta AF;

1.2. o valor do produto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$.

2. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cubo de aresta 4.

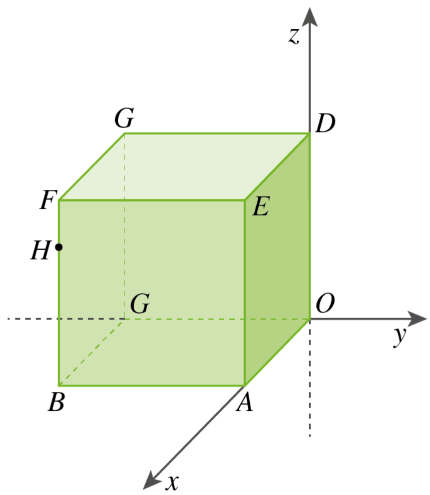
Sabe-se que:

. o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox;

. o ponto C pertence ao semieixo negativo Oy;

. o ponto D pertence ao semieixo positivo Oz;

. o ponto H tem coordenadas $(4, -4, 3)$.



2.1. A interseção da esfera $x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 18$ com a aresta $[AE]$ é um segmento de reta.

O comprimento desse segmento de reta é:

(A) 2 **(B)** $2\sqrt{3}$ **(C)** $2\sqrt{2}$ **(D)** $\sqrt{6}$

2.2. Seja r a reta que passa em H e é paralela à reta BD. A reta r interseta a face $[EDGF]$ do cubo no ponto T.

Determina as coordenadas do ponto T.

2.3. Identifica o lugar geométrico dos pontos P, do espaço, que satisfazem a condição $\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{OH} = 0$ e define, por uma equação cartesiana, esse lugar geométrico.

2.4. Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo OHC.

O valor de α, arredondado às milésimas, é:

(A) $38{,}660$ **(B)** $1{,}117$ **(C)** $0{,}675$ **(D)** $26{,}375$

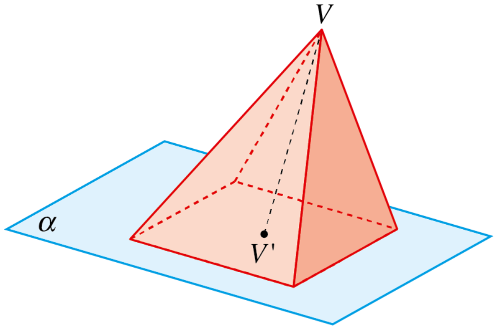
3. Na figura está representada uma pirâmide quadrangular regular.

Sabe-se que:

. a base da pirâmide está contida no plano α definido pela equação $x-y+2z-1=0$;

. o ponto $V'(1,-2,-1)$ é a projeção ortogonal de V, vértice da pirâmide sobre o plano α;

. a área da base da pirâmide é 36.



Determina as coordenadas do vértice V, sabendo que o volume da pirâmide é $24\sqrt{6}$ e a soma das coordenadas é um número negativo.

4. Seja $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e (w_n) a sucessão de termos positivos definida por:

$$\begin{cases} w_1 = k \\ w_{n+1} = w_n + k^2, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

4.1. Qual é o valor de k se $w_2 = 6$?

(A) -3 **(B)** $\sqrt{6}$ **(C)** 3 **(D)** 2

4.2. Considera $k = \frac{1}{2}$.

O termo geral da sucessão (w_n) é:

(A) $\frac{n+1}{4}$ **(B)** $2n - \frac{3}{2}$ **(C)** $\frac{2n-1}{2}$ **(D)** $\frac{5n-3}{8}$

5. Considera duas sucessões (u_n) e (v_n), tais que:

. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2n-3}{n+1}$

. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} - v_n = 2n^2 - n - 10$

5.1 Mostra que a sucessão (u_n) é limitada.

5.2 A sucessão (v_n) é monótona?

Justifica, de forma clara, a tua resposta.

6. Considera a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}$.

6.1. Mostra que (u_n) é uma progressão geométrica e indica a razão.

6.2. Seja (v_n) uma progressão geométrica em que $v_1 = u_3$ e $v_2 = u_5$.

Determina o termo geral da sucessão (v_n) .

7. A Joana e o Carlos escreveram duas sequências de números.

- A Joana escreveu uma sequência de múltiplos consecutivos de 5 a começar no número 15.
- O Carlos enviou por SMS uma sequência de múltiplos consecutivos de 3, sendo os primeiros quatro termos dessa sequência os indicados na figura.

Por coincidência, as sequências têm o mesmo número de termos e as somas dos respetivos termos são iguais.
Determina o último termo de cada uma das sequências.

FIM

Cotações														Total
Questões	1.1.	1.2.	2.1.	2.2.	2.3.	2.4.	3.	4.1.	4.2.	5.1.	5.2.	6.1.	6.2.	7.	
Pontos	15	15	11	15	15	11	18	11	11	15	15	15	15	18	200

1.

1.1. $B\hat{A}F = 120^\circ$

O declive da reta AF é igual a $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$.

A equação da reta AF é do tipo $y = -\sqrt{3}\,x + b$ e passa no posso $F(0, b)$.

$\sin 60^\circ = \frac{\overline{OF}}{\overline{AF}} = \frac{b}{2}$. Daqui resulta que $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{2}$, ou seja, $b = \sqrt{3}$.

Resposta: $y = -\sqrt{3}\,x + \sqrt{3}$

1.2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{CB}\right\| \times \cos 120^\circ = 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

Resposta: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = -2$

2.

2.1. Equação da superfície esférica que limita a esfera: $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 18$

Condição que define a aresta $[AE]$: $x = 4 \wedge y = 0 \wedge 0 \le z \le 4$

$4^2 + 0^2 + (z-2)^2 = 18 \Leftrightarrow (z-2)^2 = 2 \Leftrightarrow z = 2 - \sqrt{2} \vee z = 2 + \sqrt{2}$

O segmento de reta que resulta da interseção da esfera com a aresta $[AE]$ é o segmento de reta de extremos nos pontos $P_1\left(4, 0, 2-\sqrt{2}\right)$ e $P_2\left(4, 0, 2+\sqrt{2}\right)$.

$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(4-4)^2 + (0-0)^2 + \left(2+\sqrt{2}-2+\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Resposta: Opção **(C)** $2\sqrt{2}$

2.2. $r:\ (x, y) = H + k\overrightarrow{BD},\quad k \in \mathbb{R}$

$\overrightarrow{BD} = D - B = (0,0,4) - (4,-4,0) = (-4,4,4)$

$r:\ (x, y) = (4,-4,3) + k(-4,4,4),\quad k \in \mathbb{R}$

O ponto T é do tipo $(4-4k, -4+4k, 3+4k)$, $k \in \mathbb{R}$

A face $[EDGF]$ é definida por: $z = 4 \wedge 0 \le x \le 4 \wedge -4 \le y \le 0$

Sendo $z=4$, tem-se $3+4k=4$, ou seja, $k=\frac{1}{4}$.

Assim, $T(4-4k,-4+4k,3+4k)=(3,-3,4)$.

Resposta: $T(3,-3,4)$

2.3. $\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{OH}=0$ representa o plano perpendicular a *OH* no ponto *H*.

Seja $P(x,\ y,\ z)$.

$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{OH}=0 \Leftrightarrow (4-x,-4-y,3-z).(4,-4,3)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16-4x+16+4y+9-3z=0 \Leftrightarrow -4x+4y-3z+41=0$

Resposta: Plano perpendicular a *OH* em *H* definido pela equação $-4x+4y-3z+41=0$.

2.4. $\cos\left(O\hat{H}C\right)=\cos\left(\widehat{\overrightarrow{HO},\overrightarrow{HC}}\right)=\frac{\overrightarrow{HO}\cdot\overrightarrow{HC}}{\left\|\overrightarrow{HO}\right\|\times\left\|\overrightarrow{HC}\right\|}=\frac{(-4,4,-3)\cdot(-4,0,-3)}{\sqrt{41}\times\sqrt{25}}=$

$=\frac{25}{5\sqrt{41}}=\frac{5}{\sqrt{41}}$

Recorrendo à calculadora, obtém-se: $\cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{41}}\right)\approx 0,675$

Resposta: Opção **(C)** $\quad 0,675$

3. Volume da pirâmide:

$\frac{1}{3}\times 36\times\overline{V'V}=24\sqrt{6}$. Daqui resulta que $\overline{V'V}=2\sqrt{6}$.

Equação da reta $V'V$: $(x,y,z)=(1,-2,-1)+k(1,-1,2)$, $k\in\mathbb{R}$

Coordenadas do ponto *V*: $V(1+k,-2-k,-1+2k)$

$\overline{V'V}=2\sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{(1+k-1)^2+(-2-k+2)^2+(-1+2k+1)^2}=2\sqrt{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{k^2+k^2+4k^2}=2\sqrt{6} \Leftrightarrow 6k^2=24 \Leftrightarrow k^2=4 \Leftrightarrow k=-2 \vee k=2$

- Se $k=-2$, então $V(-1,0,-5)$ (a soma das coordenadas é negativa).
- Se $k=2$, então $V(3,-4,5)$ (a soma das coordenadas é positiva).

Resposta: $V(-1,0,-5)$

4.

4.1. $w_1 = k$ e $w_2 = w_1 + k^2 = k + k^2$

$$w_2 = 6 \Leftrightarrow k + k^2 = 6 \Leftrightarrow k^2 + k - 6 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow k = -3 \ \vee \ k = 2$$

Como os termos são positivos, o valor de k é 2.

Resposta: Opção (**D**) 2

4.2 $k = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} w_1 = \frac{1}{2} \\ w_{n+1} = w_n + \frac{1}{4}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \rightarrow \text{Progressão aritmética em que o 1.º termo é } \frac{1}{2} \text{ e a razão é } \frac{1}{4}$$

Termo geral: $w_n = \frac{1}{2} + (n-1)\frac{1}{4} = \frac{n}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{n+1}{4}$

Resposta: Opção (**A**) $\frac{n+1}{4}$

5.

5.1. $u_n = 2 - \frac{5}{n+1}$

$$\begin{array}{r|l} 2n-3 & n+1 \\ \hline -2n-2 & 2 \\ \hline -5 & \end{array}$$

$0 < \frac{5}{n+1} \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 > -\frac{5}{n+1} \geq -\frac{5}{2} \Leftrightarrow$

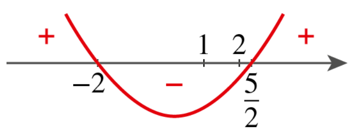
$\Leftrightarrow 2 > 2 - \frac{5}{n+1} \geq -\frac{1}{2}$

Assim, $\forall n \in \mathbb{N}$, $-\frac{1}{2} \leq u_n < 2$, donde se conclui que (u_n) é limitada.

5.2. $\forall n \in \mathbb{N}, \ v_{n+1} - v_n = 2n^2 - n - 10$

Estudo do sinal da expressão $2n^2 - n - 10$:

$$2n^2 - n - 10 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{4} \Leftrightarrow n = \frac{5}{2} \ \vee \ n = -2$$



Se $n \in \{0,1\}$, $v_{n+1} - v_n < 0$ (a sucessão não é crescente).

Se $n > 2$, $v_{n+1} - v_n > 0$ (a sucessão não é decrescente).

Conclui-se que a sucessão não é monótona.

6.

6.1. $u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^{1-(n+1)}}{3\left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n-1-(1-n)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$$

(u_n) é uma progressão geométrica de razão 2.

6.2. $v_1 = 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 3\times 4 = 12$

$v_2 = 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 3\times 16 = 48$

Razão: $r = \frac{v_2}{v_1} = \frac{48}{12} = 4$

Termo geral: $v_n = v_1 \times r^{n-1} = 12\times 4^{n-1}$

Resposta: $v_n = 12\times 4^{n-1}$

7. Termo geral da sequência escrita pela Joana: $j_n = 15 + (n-1)5 = 5n+10$

Termo geral da sequência escrita pelo Carlos: $c_n = 33 + (n-1)3 = 3n+30$

Seja n o número de termos de cada uma das sequências.

Soma dos termos da sequência escrita pela Joana: $\frac{15+5n+10}{2}\times n = \frac{5n+25}{2}\times n$

Soma dos termos da sequência escrita pelo Carlos: $\frac{33+3n+30}{2}\times n = \frac{63+3n}{2}\times n$

Como as somas são iguais, tem-se: $\frac{5n+25}{2}\times n = \frac{63+3n}{2}\times n$

$$\frac{5n+25}{2}\times n = \frac{63+3n}{2}\times n \Leftrightarrow 5n+25 = 63+3n \Leftrightarrow 2n = 38 \Leftrightarrow n = 19$$

O último termo escrito pela Joana foi $j_{19} = 5\times 19 + 10 = 105$.

O último termo escrito pelo Carlos foi $c_{19} = 3\times 19 + 30 = 87$.

Resposta: O último termo da sequência da Joana foi 105 e o último do Carlos foi 87.