Nome: ____

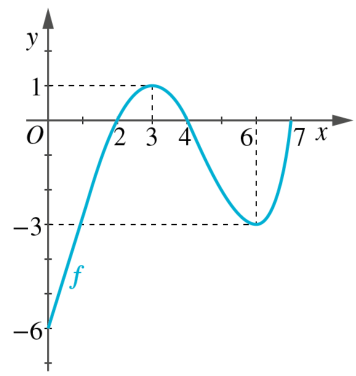
Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

---

1. Na figura está representada, em referencial o.n. *Oxy*, uma função *f* de domínio $[0, 7]$.

1.1. Das seguintes afirmações, identifica a verdadeira:



(A) $f(\pi)\times f\left(\sqrt{2}\right)>0$

(B) $f\left(\sqrt{5}\right)-f(5)<0$

(C) $\forall x_1, x_2 \in [0, 7], x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

(D) $\forall x \in [0, 7], 1 - f(x) \geq 0$

1.2. A equação $f(x)=k$ tem exatamente duas soluções se e só se k pertencer ao conjunto:

(A) $[-3, 1[$ **(B)** $]0, 1[$

(C) $]0, 1[\cup\{-3\}$ **(D)** $]2, 4[\cup\{6\}$

1.3. Indica, na forma de intervalo de números reais, o contradomínio da função *g* definida por:

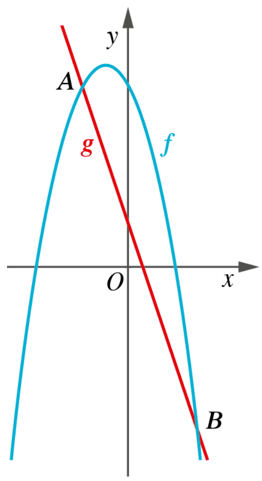
a) $g(x)=-f(x+2)$

b) $g(x)=-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{3}\right)$

2. Sabe-se que uma função quadrática *g* é representada por uma parábola de vértice $(-3, 7)$ e que $f(2)<0$.

Indica o contradomínio da função $h(x)=-g(x)+4$.

3. No referencial da figura está representada graficamente uma função quadrática *f* e uma função afim *g* definida por $g(x)=-3x+2$.



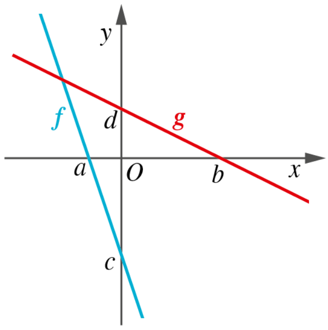
Sabe-se que:

– o vértice da parábola é o ponto de coordenadas $(-1, 9)$;

– os gráficos de *f* e *g* intersetam-se nos pontos *A* e *B*, sendo $A(-2, 8)$.

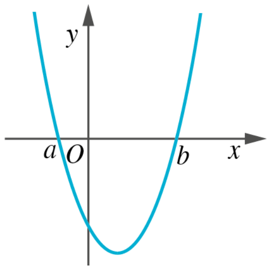
Determina as coordenadas do ponto *B*.

4. No referencial da figura ao lado estão representadas duas funções afins *f* e *g*.

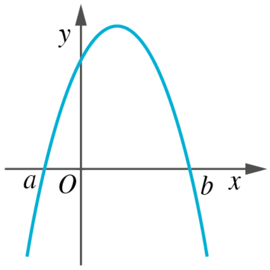


4.1. Indica qual das seguintes representações gráficas pode corresponder à função $f \times g$.

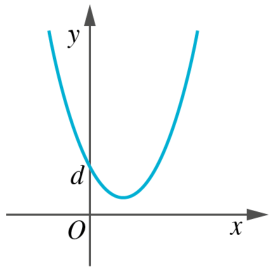
(A)



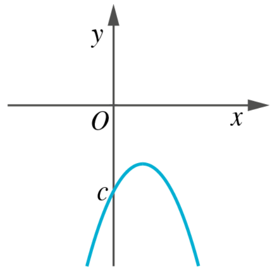
(B)



(C)



(D)



4.2. O domínio da função $\dfrac{f}{g}$ é :

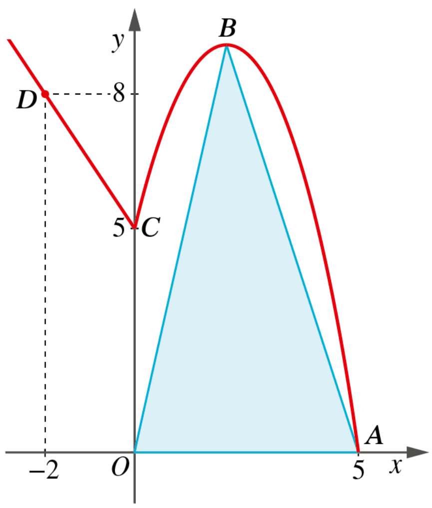
(A) $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ **(B)** $\mathbb{R} \setminus \{b\}$

(C) $\mathbb{R} \setminus \{a, b\}$ **(D)** $\mathbb{R}$

5. Na figura está representada uma função *f* de domínio $]-\infty, 5]$.

Sabe-se que:

- para $x \in \mathbb{R}_0^-$, a representação gráfica é uma semirreta com origem em $C(0, 5)$ e que passa por $D(-2, 8)$;
- para $x \in]0, 5]$, as ordenadas dos pontos do gráfico são dadas pela expressão $f(x) = -x^2 + 4x + 5$;
- a abcissa do ponto *B* é máximo relativo da função.



Determina:

5.1. a ordenada do ponto do gráfico de *f* que tem abcissa –5;

5.2. a área do triângulo $[OAB]$.

6. Considera os polinómios $P(x)=x^4-4x^3+16x-16$ e $A(x)=x^2-2x-3$.

6.1. Pode afirmar-se que 2 é uma raiz de $P(x)$:

(A) simples. **(B)** de multiplicidade 2.

(C) de multiplicidade 3. **(D)** de multiplicidade 4.

6.2. Determina o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $A(x)$.

6.3. Resolve a equação $A(x)(x-3)\leq 0$.

7. Numa prova de aeromodelismo, é registada, durante 10 segundos, a distância ao solo de cada avião a partir do momento em que inicia a realização de um determinado exercício de perícia.

Sabe-se que a altitude do avião A é representada, em metros, por $f(t)$, sendo t o tempo decorrido, em segundos, por:

$$f(t)=t^3-14t^2+40t+130\text{, com } t\in[0,10]$$

7.1. Determina a altitude a que se encontrava o avião A no momento em que iniciou o exercício referido.

7.2. Recorre às capacidades gráficas da tua calculadora para responder às seguintes questões.

a) Determina a altitude máxima atingida pelo avião durante o período em que foi observado. Apresenta o resultado em metros, arredondado às décimas.

b) O avião A manteve uma altitude inferior a 100 metros durante um intervalo de tempo do tipo $]a,b[$. Determina valores, arredondados às décimas, de a e de b.

Apresenta o esboço do(s) gráfico(s) observado(s) e identifica pontos relevantes para fundamentar a tua resposta.

FIM

	Cotações																
Questões	1.1.	1.2.	1.3. a)	1.3. b)	2.	3.	4.1.	4.2.	5.1.	5.2.	6.1.	6.2.	6.3.	7.1.	7.2. a)	7.2. b)	**Total**
Pontos	10	10	10	10	15	20	10	10	12	15	10	18	15	10	10	15	**200**

1.

1.1. **Resposta:** Opção **(D)** $\forall x \in [0, 7], 1 - f(x) \geq 0$

1.2. **Resposta:** Opção **(C)** $]0, 1[\cup \{-3\}$

1.3. **a) Resposta:** $D'_g = [-1, 6]$

b) Resposta: $D'_g = \left[-\frac{1}{2}, 3\right]$

2. Se o vértice tem coordenadas $(-3, 7)$ e $g(2) < 0$, então a concavidade é voltada para baixo.

Assim, o contradomínio da função *g* é $]-\infty, 7]$.

O contradomínio de h é $[-7 + 4, +\infty[$, ou seja, $[-3, +\infty[$.

Resposta: $D'_h = [-3, +\infty[$

3. $f(x) = a(x-h)^2 + k$

$f(x) = a(x+1)^2 + 9$

O ponto $A(-2, 8)$ pertence ao gráfico de *f*. Então, $f(-2) = 8$.

$f(-2) = 8 \Leftrightarrow a \times (-2+1)^2 + 9 = 8 \Leftrightarrow a = -1$

Assim, tem-se $f(x) = -(x+1)^2 + 9$.

As soluções da equação $f(x) = g(x)$ são as abcissas dos pontos *A* e *B*.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -(x+1)^2 + 9 = -3x + 2 \Leftrightarrow -x^2 - 2x - 1 + 3x = -7$

$\Leftrightarrow -x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{-2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$

A abcissa de *B* é 3, sendo $(3, g(3))$ as respetivas coordenadas. Assim, tem-se $B(3, -7)$.

Resposta: $B(3, -7)$

4.

4.1. Repara no estudo do sinal de cada uma das seguintes funções: *f*, *g* e $f \times g$

x	$-\infty$	a		b	$+\infty$
f	+	0	–	–	–
g	+	+	+	0	–
$f \times g$	+	0	–	0	+

Dos gráficos apresentados o único compatível com o sinal de $f \times g$ é a opção (A).

Resposta: **Opção (A)**

4.2. $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{b\}$

Resposta: Opção (B) $\mathbb{R} \setminus \{b\}$

5.

5.1. Se $x \leq 0$, tem-se $f(x) = mx + 5$ e o ponto $D(-2, 8)$ pertence ao gráfico de *f*.

$f(-2) = 8 \Leftrightarrow -2m + 5 = 8 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$

$f(-5) = -\frac{3}{2} \times (-5) + 5 = \frac{25}{2}$

Resposta: A ordenada do ponto de abcissa –5 é $\frac{25}{2}$.

5.2. $f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x + 5 & \text{se } x \leq 0 \\ -x^2 + 4x + 5 & \text{se } 0 < x \leq 5 \end{cases}$

$f(x) = -x^2 + 4x + 5 = -\left(x^2 - 4x + 4 - 4\right) + 5 = -(x-2)^2 + 9$

O ponto *B* tem coordenadas $(2, 9)$. A altura do triângulo [*OAB*] em relação ao lado [*AO*] é, portanto, 9.

A área do triângulo [*OAB*] é dada por $\frac{\overline{OA} \times 9}{2}$.

$\frac{\overline{OA} \times 9}{2} = \frac{5 \times 9}{2} = 22,5$

Resposta: A área do triângulo [*OAB*] é 22,5.

6.

6.1.

	1	–4	0	16	–16
2		2	–4	–8	16
	1	–2	–4	8	**0**
2		2	0	–8	
	1	0	–4	**0**	
2		2	4		
	1	**2**	**0**		
2		2			
	1	4			

$P(x) = (x-2)^3(x+2)$. Conclui-se que 2 é uma raiz tripla.

Resposta: Opção (C) raiz de multiplicidade 3.

6.2. Sejam $Q(x)$ e $R(x)$, respetivamente, o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $A(x)$. Efetuando o algoritmo da divisão, obtém-se:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -4x^3 & & +16x & -16 & x^2-2x-3 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +2x^3 & +3x^2 & & & x^2-2x-1 \\ \cline{1-5}
 & -2x^3 & +3x^2 & +16x & -16 & \\
 & +2x^3 & -4x^2 & -6x & & \\ \cline{2-5}
 & & -x^2 & +10x & -16 & \\
 & & +x^2 & -2x & -3 & \\ \cline{3-5}
 & & & 8x & -19 &
\end{array}$$

Resposta: $Q(x)=x^2-2x-1$ e $R(x)=8x-19$

6.3. $A(x)(x-3)\le 0 \Leftrightarrow (x^2-2x-3)(x-3)\le 0$

Tem-se: $x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x=3 \vee x=-1$

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
x^2-2x-3	$+$	0	$-$	0	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$A(x)(x-3)$	$-$	0	$+$	0	$+$

$(x^2-2x-3)(x-3)\le 0 \Leftrightarrow x\in\,]-\infty,-1]\cup\{3\}$

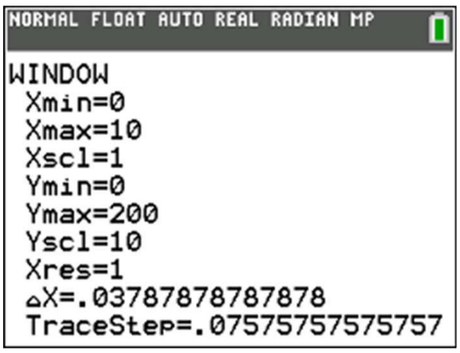
Resposta: $x\in\,]-\infty,-1]\cup\{3\}$

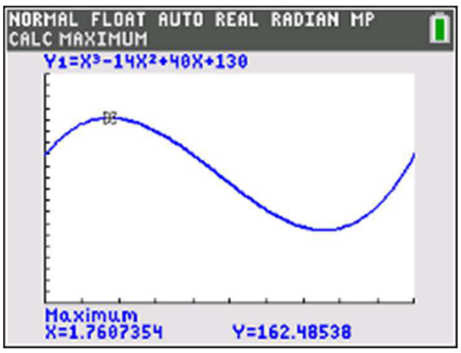
7.

7.1. Para $t=0$, tem-se $f(0)=130$.

Resposta: O avião encontrava-se a 130 m de altitude.

7.2. **a)** Após inserir a expressão da função na calculadora e definir uma janela adequada tendo em conta que $t\in[0,10]$, identifica-se o máximo da função.





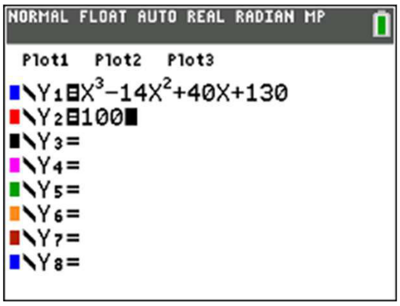
Observa-se que a altitude máxima atingida pelo avião, durante o período em que foi obbservado foi, aproximadamente, de 162,5 m.

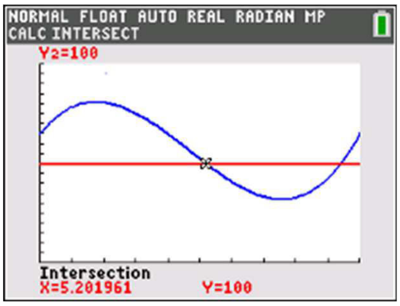
b) Pretende-se resolver a inequação $f(t) < 100 \Leftrightarrow t^3 - 14t^2 + 40t + 130 < 100$

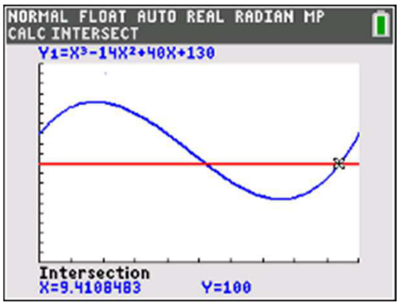
Seja g a função constante $g(t) = 100$.

Identificam-se os pontos de interseção dos gráficos das funções f e g, bem como o intervalo correspondente ao conjunto-solução da inequação $f(t) < 100$.

As abcissas desses pontos são os valores de a e de b.







Podemos observar que $a \approx 5,2$ e $b \approx 9,4$.

FIM