Teste de Matemática A

2016 / 2017

Teste N.º 4

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

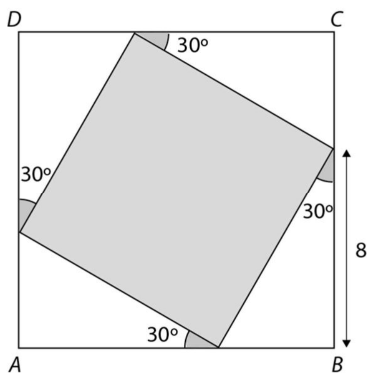
11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ____ Turma: ____

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais **só uma** está correta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que selecionar para responder a esse item.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos nem justificações.**

1. Na figura encontra-se representado um quadrado $[ABCD]$. De acordo com os dados da figura, qual é a área do quadrado sombreado?



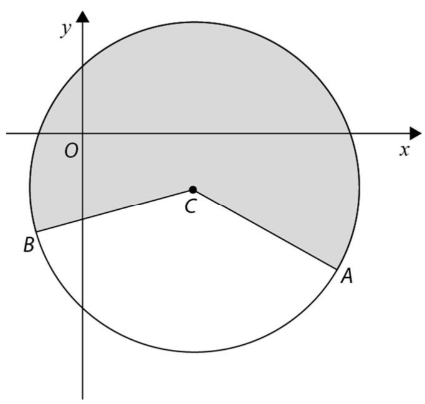
(A) $\frac{64\sqrt{3}}{3}$ u.a.

(B) 192 u.a.

(C) 256 u.a.

(D) $\frac{256}{3}$ u.a.

2. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro C e equação $(x-2)^2+(y+1)^2=12$. Sabe-se que A e B são dois pontos da circunferência e que a área da região sombreada é $\frac{15\pi}{2}$.



Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$?

(A) $-6\sqrt{2}$

(B) -6

(C) $6\sqrt{2}$

(D) 6

3. O diretor de uma escola quer colocar os seus 435 alunos em filas, de modo a que na primeira fila fique um aluno, na segunda fila fiquem dois alunos, na terceira três alunos e assim sucessivamente. Quantas filas se podem formar desta maneira?

(A) 15 **(B)** 29 **(C)** 30 **(D)** 35

4. Considere as proposições:

I. A sucessão de termo geral $a_n = 1 - \frac{2}{3n}$ é um infinitésimo.

II. A sucessão de termo geral $b_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$ é convergente.

Acerca das proposições anteriores, podemos afirmar que:

(A) são ambas verdadeiras.

(B) apenas a proposição I é verdadeira.

(C) apenas a proposição II é verdadeira.

(D) são ambas falsas.

5. Seja $P(x)$ um polinómio de grau 2 tal que $\lim \frac{P(n)}{2n^2+3} = -2$. Qual dos seguintes polinómios poderá ser $P(x)$?

(A) $x^2 + 2x - 1$

(B) $-2x^2 + 6x$

(C) $-4x^2 + 3x - 1$

(D) $2x^2 + 2x + 1$

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: Quando para um resultado não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exato**.

1. Considere a função f, de domínio $[0, \pi[$, definida por $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} + \frac{\cos^2 x}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} - 2$.

1.1. Mostre que $f(x) = -\sin x - \cos x$.

1.2. Seja $\alpha \in [0, \pi[$ tal que $\arccos \frac{2}{7} = \alpha$. Determine $f(\alpha)$.

2. Num referencial o.n. xOy, considere a circunferência de centro C definida por:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$$

A reta r é tangente à circunferência no ponto A de coordenadas (0, 4).

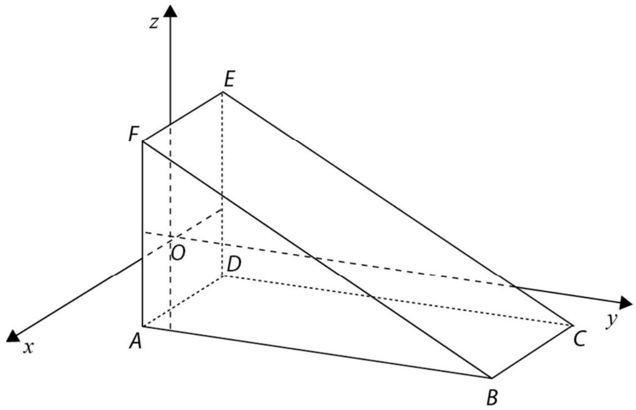
2.1. Determine, em graus, a inclinação da reta r. Apresente o resultado arredondado às centésimas.

2.2. Determine a amplitude, em graus, do ângulo formado pelas retas AC e OC. Apresente o resultado arredondado às centésimas.

3. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma triangular $[ABCDEF]$.

Sabe-se que:

- $[ABF]$ e $[DCE]$ são triângulos retângulos;
- $[ADEF]$ é um quadrado e está contido no plano de equação $y = 2$;
- $[ABCD]$ está contido no plano xOy;
- a reta EC tem equação vetorial $(x, y, z) = (2, -6, 8) + k(0, 4, -2), k \in \mathbb{R}$;
- o ponto A tem coordenadas (6, 2, 0).



3.1. Mostre que o ponto E tem coordenadas (2, 2, 4) e o ponto C tem coordenadas (2,10, 0).

3.2. Determine uma equação cartesiana do plano que passa no ponto A e é perpendicular à reta EC.

3.3. Seja α o plano definido pela equação $x - 2y + z = 5$. Averigúe se os planos α e AEC são perpendiculares.

4. Um atleta está a planear o seu treino de preparação para correr uma maratona. No primeiro dia de treino planeia correr 10 km. Em cada um dos dias de treino seguintes aumentará a distância percorrida em 5% relativamente ao dia de treino anterior.

4.1. Determine uma expressão que permita calcular quantos quilómetros o atleta corre no *n*-ésimo dia de treino.

4.2. Quantos quilómetros terá percorrido o atleta ao fim de 20 dias de treino? Apresente o resultado arredondado às unidades.

5. Mostre, por indução matemática, que $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ é um múltiplo de 7, $\forall n \in \mathbb{N}$.

6. Considere as sucessões (u_n) e (v_n) definidas por $u_n = \frac{1}{3n+2}$ e $v_n = n^2 + 2n$.

6.1. Mostre, recorrendo à definição de limite, que $\lim u_n = 0$.

6.2. Determine:

6.2.1. $\lim((u_n)^2 \times v_n)$

6.2.2. $\lim(\sqrt{v_n} - n)$

– FIM –

COTAÇÕES

Grupo I 50

Cada resposta certa 10
Cada resposta errada.. 0
Cada questão não respondida ou anulada............................... 0

Grupo II 150

1. 25
    - 1.1. 15
    - 1.2. 10
2. 20
    - 2.1. 10
    - 2.2. 10
3. 35
    - 3.1. 10
    - 3.2. 10
    - 3.3. 15
4. 20
    - 4.1. 10
    - 4.2. 10
5. 15
6. 35
    - 6.1. 10
    - 6.2. .... (10 + 15) 25

TOTAL 200

TESTE N.º 4 – Proposta de resolução

Grupo I

1. Opção (D)

Seja a a medida do lado do quadrado sombreado.

$\cos 30° = \frac{8}{a} \Leftrightarrow a = \frac{8}{\cos 30°} \Leftrightarrow a = \frac{8}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow a = \frac{16}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a = \frac{16\sqrt{3}}{3}$

Então, $A = \frac{16\sqrt{3}}{3} \times \frac{16\sqrt{3}}{3} = \frac{256}{3}$ u.a.

2. Opção (A)

$\frac{\alpha \times 12}{2} = \frac{15\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{15\pi}{12} \Leftrightarrow \alpha = \frac{5\pi}{4}$, sendo $2\pi - \alpha$ o ângulo formado pelos dois vetores.

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \sqrt{12} \times \sqrt{12}\cos\left(2\pi - \frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{12} \times \sqrt{12}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 12 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -6\sqrt{2}$

3. Opção (B)

Seja n o número de filas que se podem formar.

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = 435 \Leftrightarrow \frac{1+n}{2} \times n = 435 \Leftrightarrow n + n^2 = 870 \Leftrightarrow n^2 + n - 870 = 0 \Leftrightarrow n = 29 \vee n = -30$

Como $n \in \mathbb{N}$, então $n = 29$.

4. Opção (C)

$\lim a_n = \lim\left(1 - \frac{2}{3n}\right) = 1 - 0 = 1$, logo a sucessão (a_n) não é um infinitésimo.

$\lim b_n = \lim\left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$, logo a sucessão (b_n) é convergente.

5. Opção (C)

$\lim \frac{n^2+2n-1}{2n^2+3} = \lim \frac{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n^2}} = \frac{1}{2}$

$\lim \frac{-2n^2+6n}{2n^2+3} = \lim \frac{-2+\frac{6}{n}}{2+\frac{3}{n^2}} = -1$

$\lim \frac{-4n^2+3n-1}{2n^2+3} = \lim \frac{-4+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n^2}} = -2$

$\lim \frac{2n^2+2n+1}{2n^2+3} = \lim \frac{2+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n^2}} = 1$

Grupo II

1.

1.1. $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} + \frac{\cos^2 x}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} - 2 =$

$= \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} + \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} - 2 =$

$= \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} \times \frac{1-\cos x}{1-\cos x} + \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} \times \frac{1-\sin x}{1-\sin x} - 2 =$

$= \frac{\sin^2 x - \sin^2 x \cos x}{1-\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x - \cos^2 x \sin x}{1-\sin^2 x} - 2 =$

$= \frac{\sin^2 x(1-\cos x)}{\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x(1-\sin x)}{\cos^2 x} - 2 =$

$= 1 - \cos x + 1 - \sin x - 2 =$

$= -\sin x - \cos x$

1.2. $\arccos \frac{2}{7} = \alpha$, ou seja, $\cos\alpha = \frac{2}{7}$.

Logo:

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{4}{49} \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{45}{49}$

Como $\alpha \in [0, \pi[$, então $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{5}}{7}$.

$f(\alpha) = -\sin\alpha - \cos\alpha = -\frac{3\sqrt{5}}{7} - \frac{2}{7}$

2.

2.1. $C(1, 2)$

$\overrightarrow{AC}(1, -2)$

Logo, $m_{AC} = \frac{-2}{1} = -2$.

Como r é tangente à circunferência no ponto A, então r é perpendicular a AC. Assim, $m_r = \frac{1}{2}$.

Assim, a inclinação α de r é tal que $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ e $0° < \alpha < 90°$. Logo, $\alpha \approx 26{,}57°$.

2.2. $C(1, 2)$

$\overrightarrow{AC}(1, -2)$

$\overrightarrow{OC}(1,2)$

$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

$\|\overrightarrow{OC}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OC} = 1 \times 1 + (-2) \times 2 = -3$

Seja α a amplitude do ângulo formado pelas retas AC e OC.

Tem-se que:

$\cos\alpha = \frac{|-3|}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5}$

Logo, $\alpha \approx 53{,}13°$.

3.

3.1. O ponto E é a interseção da reta EC com o plano de equação $y = 2$, logo:

$$(x, 2, z) = (2, -6, 8) + k(0, 4, -2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2 = -6 + 4k \\ z = 8 - 2k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ k = 2 \\ z = 4 \end{cases}$$

Assim, as coordenadas do ponto E são (2, 2, 4).

O ponto C é a interseção da reta EC com o plano de equação $z = 0$, logo:

$$(x, y, 0) = (2, -6, 8) + k(0, 4, -2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -6 + 4k \\ 0 = 8 - 2k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 10 \\ k = 4 \end{cases}$$

Assim, as coordenadas do ponto C são (2, 10, 0).

3.2. Um vetor diretor da reta EC é (0, 4, –2), que é um vetor normal ao plano cuja equação se pretende determinar. O ponto A(6, 2, 0) pertence a esse plano.

Assim:

$$0(x-6) + 4(y-2) - 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow 4y - 8 - 2z = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y - z - 4 = 0$$

3.3. $\overrightarrow{AE} = (2, 2, 4) - (6, 2, 0) = (-4, 0, 4)$

$\overrightarrow{EC} = (2, 10, 0) - (2, 2, 4) = (0, 8, -4)$

Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor não nulo normal ao plano AEC. Então:

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE} = 0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + 4c = 0 \\ 8b - 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = \frac{1}{2}c \end{cases}$$

Assim, $\vec{n}\left(c, \frac{1}{2}c, c\right), c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Consideremos, por exemplo, $\vec{n}(2, 1, 2)$.

Um vetor normal ao plano α é $\vec{m}(1, -2, 1)$.

$\vec{n}\cdot\vec{m} = (2, 1, 2)\cdot(1, -2, 1) = 2 - 2 + 2 = 2$

Como $\vec{n}\cdot\vec{m} \neq 0$, os planos α e AEC não são perpendiculares.

4.

4.1. $u_n = 10 \times 1{,}05^{n-1}$

4.2. $S_{20} = 10 \times \frac{1-1{,}05^{20}}{1-1{,}05} \approx 331$ km

5. Seja $P(n)$: $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ é um múltiplo de 7.

$P(1)$: $2^3 + 3^3 = 8 + 27 = 35$ é um múltiplo de 7.

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $P(n)$ é uma proposição verdadeira.

Hipótese: $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ é um múltiplo de 7.

Tese: $2^{n+1+2} + 3^{2(n+1)+1} = 2^{n+3} + 3^{2n+3}$ é um múltiplo de 7.

Demonstração:

$$\begin{aligned} 2^{n+3} + 3^{2n+3} &= 2^{n+2} \times 2 + 3^{2n+1} \times 9 = \\ &= 2^{n+2} \times 2 + 3^{2n+1} \times (2+7) = \\ &= 2^{n+2} \times 2 + 3^{2n+1} \times 2 + 3^{2n+1} \times 7 = \\ &= 2 \times (2^{n+2} + 3^{2n+1}) + 3^{2n+1} \times 7 \end{aligned}$$

Por hipótese de indução, $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ é um múltiplo de 7. Por outro lado, $3^{2n+1} \times 7$ é um múltiplo de 7. Como a soma de dois múltiplos de 7 é um múltiplo de 7, então $2 \times (2^{n+2} + 3^{2n+1}) + 3^{2n+1} \times 7$ é um múltiplo de 7.

Vimos que se $P(n)$ é uma proposição verdadeira, então $P(n+1)$ também é uma proposição verdadeira, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Fica assim provado, usando o método de indução matemática, que $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ é um múltiplo de 7, $\forall n \in \mathbb{N}$.

6.

6.1. Pretende-se provar que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left|\frac{1}{3n+2} - 0\right| < \delta$.

Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$.

$\left|\frac{1}{3n+2} - 0\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{1}{3n+2}\right| < \delta$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3n+2} < \delta$

$\Leftrightarrow 3n + 2 > \frac{1}{\delta}$

$\Leftrightarrow 3n > \frac{1}{\delta} - 2$

$\Leftrightarrow n > \frac{1}{3\delta} - \frac{2}{3}$

Assim, se $n > \frac{1}{3\delta} - \frac{2}{3}$, então $\left|\frac{1}{3n+2} - 0\right| < \delta$, e, portanto, se $p > \frac{1}{3\delta} - \frac{2}{3}$, fica provado que $\forall \delta \in \mathbb{R}^+\ \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left|\frac{1}{3n+2} - 0\right| < \delta$, ou seja, que $\lim \frac{1}{3n+2} = 0$.

6.2.

6.2.1. $\lim((u_n)^2 \times v_n) = \lim \frac{n^2+2n}{9n^2+12n+4} =$

$$= \lim \frac{1+\frac{2}{n}}{9+\frac{12}{n}+\frac{4}{n^2}} =$$

$$= \frac{1+0}{9+0+0} =$$

$$= \frac{1}{9}$$

6.2.2. $\lim\left(\sqrt{v_n} - n\right) = \lim\left(\sqrt{n^2+2n} - n\right) = \lim \frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n} =$

$$= \lim \frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} =$$

$$= \lim \frac{2n}{\sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{2}{n}}+n} = \lim \frac{2n}{n\sqrt{1+\frac{2}{n}}+n} =$$

$$= \lim \frac{2n}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)} = \lim \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+0}+1} = 1$$