**Teste de Matemática A**

2016 / 2017

Teste N.º 1

**Matemática A**

Duração do Teste: 90 minutos

**10.º Ano de Escolaridade**

Nome do aluno: ______________________________________ N.º: ____ Turma: ____

## Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais **só uma** está correta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que selecionar para responder a esse item.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos nem justificações.**

**1.** Sejam $p$, $q$ e $r$ três proposições quaisquer. Qual das seguintes afirmações é falsa?

**(A)** Se $p$ é verdadeira e $\sim q$ é falsa, então $p \wedge q$ é verdadeira.

**(B)** A proposição $p \Rightarrow (q \vee r)$ é equivalente à proposição $\sim p \vee q \vee r$.

**(C)** A proposição $p \vee (q \wedge r)$ é equivalente à proposição $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

**(D)** Se $p$ é verdadeira, $q$ é falsa e $r$ é falsa, então $p \vee (q \wedge r)$ é verdadeira.

**2.** Sabendo que a proposição $\sim p \wedge q$ é verdadeira, quais podem ser as proposições $p$ e $q$?

**(A)** $p$: "15 é um número primo" e $q$: "todos os números primos são ímpares".

**(B)** $p$: "2 é um número primo" e $q$: "4 é um divisor de 18".

**(C)** $p$: "1005 é um múltiplo de 5" e $q$: "1005 é divisível por 3".

**(D)** $p$: "3 é divisor de 23" e $q$: "29 é um número primo".

**3.** Considere a proposição $\forall x, (x \leq 2 \ \vee \ x > 1)$. Qual das seguintes proposições é equivalente à negação da anterior?

**(A)** $\forall x, (x > 2 \ \wedge \ x \leq 1)$

**(B)** $\exists x\colon (x > 2 \ \wedge \ x \leq 1)$

**(C)** $\exists x\colon (x > 2 \ \vee \ x \leq 1)$

**(D)** $\exists x\colon (x \geq 2 \ \wedge \ x < 1)$

**4.** Considere a condição $x^3 + x^2 + 2x = -x^3 + x^2$. Relativamente a esta equação, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

**(A)** A condição é universal em $\mathbb{R}$.

**(B)** A condição é possível em $\mathbb{R}$ e o seu conjunto-solução é $\{0\}$.

**(C)** A condição é possível em $\mathbb{R}$ e o seu conjunto-solução é $\{-1, 0, 1\}$.

**(D)** A condição é impossível em $\mathbb{R}$.

**5.** Sejam $A$ e $B$ os seguintes conjuntos de números reais:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}: 2x - \frac{1}{2} \leq 3x\right\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z}: 3x > -4 \ \wedge \ 4x \leq 9\}$$

Qual dos seguintes conjuntos representa $B \backslash A$?

**(A)** $\{-1\}$

**(B)** $\{0, 1, 2\}$

**(C)** $\left]-\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right]$

**(D)** $\left]-\frac{4}{3}, -\frac{1}{2}\right[$

## Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção:** Quando para um resultado não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exato**.

**1.** Considere as proposições $p$, $q$ e $r$:

$p$: "Um quadrado não é um retângulo."

$q$: "Um retângulo é um paralelogramo."

$r$: "Um quadrado é um paralelogramo."

**1.1.** Traduza em linguagem corrente as seguintes proposições.

**1.1.1.** $\sim p \ \wedge \sim q \ \wedge \ r$

**1.1.2.** $p \Rightarrow \sim(q \ \vee \ r)$

**1.2.** Traduza em linguagem simbólica a proposição "Se um quadrado não é um retângulo e um retângulo é um paralelogramo, então um quadrado não é um paralelogramo".

Traduza também em linguagem simbólica a negação da proposição anterior, simplificando-a.

**1.3.** Determine o valor lógico da proposição $\sim\left(p \Rightarrow (q \ \wedge \sim r)\right)$.

**2.** Considere duas proposições $p$ e $q$. Mostre que a proposição $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge \sim q)$ é equivalente a $\sim q$, recorrendo:

**2.1.** a uma tabela de verdade;

**2.2.** às propriedades das operações lógicas.

**3.** Considere as proposições $p$, $q$ e $r$:

$p$: "O João vai ao cinema."
$q$: "O João vai ao futebol."
$r$: "O João vai às compras."

Sabendo que a proposição $\left(p \vee (\sim q \Rightarrow r)\right) \wedge \sim(q \vee r)$ é verdadeira, determine o que pode concluir sobre o João.

**4.** Classifique cada uma das seguintes condições, no universo indicado.

**4.1.** $x^2 + 4 \geq 0$, em $\mathbb{Z}^-$

**4.2.** $x^3 - 8 = 0 \wedge |x| \leq 2$, em $\mathbb{R}$

**5.** Considere, em $\mathbb{R}$, as seguintes condições:

$p(x): x^2 - 4x + 3 = 0$
$q(x): x - \frac{5}{4} \geq -\frac{x+1}{2}$
$r(x): x^2 > 9$

**5.1.** Determine o conjunto-solução de $p(x) \vee \left(q(x) \wedge r(x)\right)$.

**5.2.** Indique, justificando, o valor lógico da proposição $\forall x, q(x) \Rightarrow r(x)$.

**5.3.** Apresente uma proposição equivalente à negação da proposição $\exists x: p(x) \Rightarrow q(x)$, sem utilizar o símbolo $\sim$.

**5.4.** Sendo $P = \{x: p(x)\}$ e $Q = \{x: q(x)\}$, defina em extensão o conjunto $\bar{P} \cap Q$.

**6.** Demonstre, por contrarrecíproco, que, para todo o número natural $n$, se $3n + 5$ é um número natural ímpar, então $n$ é um número natural par.

**– FIM –**

## COTAÇÕES

**Grupo I ........................................................................................ 50**

Cada resposta certa ........................................................ 10
Cada resposta errada ........................................................ 0
Cada questão não respondida ou anulada ............................... 0

**Grupo II ........................................................................................ 150**

1. ........................................................................................ 30
   1.1. ............................................................ 10
   1.2. ............................................................ 10
   1.3. ............................................................ 10
2. ........................................................................................ 30
   2.1. ............................................................ 15
   2.2. ............................................................ 15
3. ........................................................................................ 15
4. ........................................................................................ 10
   4.1. ............................................................ 5
   4.2. ............................................................ 5
5. ........................................................................................ 50
   5.1. ............................................................ 20
   5.2. ............................................................ 10
   5.3. ............................................................ 10
   5.4. ............................................................ 10
6. ........................................................................................ 15

**TOTAL ........................................................................................ 200**

## TESTE N.º 1 – Proposta de resolução

### Grupo I

**1. Opção (C)**

A afirmação (A) é verdadeira. Se $\sim q$ é uma proposição falsa, então $q$ é uma proposição verdadeira. Assim, $p \wedge q$ é uma proposição verdadeira, por se tratar da conjunção de duas proposições verdadeiras.

A afirmação (B) é verdadeira. A proposição $p \Rightarrow (q \vee r)$ é equivalente à proposição $\sim p \vee (q \vee r)$, que é o mesmo que $\sim p \vee q \vee r$.

A afirmação (C) é falsa. Por exemplo, se a proposição $p$ é verdadeira e as proposições $q$ e $r$ são ambas falsas, tem-se que $p \vee (q \wedge r)$ é uma proposição verdadeira (por se tratar da disjunção de uma proposição verdadeira com uma proposição falsa) e que $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ é uma proposição falsa (por se tratar da disjunção de duas proposições falsas).

A afirmação (D) é verdadeira. Se as proposições $q$ e $r$ são falsas, então a proposição $q \wedge r$ é falsa, por se tratar da conjunção de duas proposições falsas. Como $p$ é uma proposição verdadeira, então $p \vee (q \wedge r)$ é uma proposição verdadeira, por se tratar da disjunção de uma proposição verdadeira com uma proposição falsa.

**2. Opção (D)**

A proposição $\sim p \wedge q$ é verdadeira, logo as proposições $\sim p$ e $q$ são ambas verdadeiras, uma vez que a conjunção de duas proposições só é verdadeira se ambas forem verdadeiras. Como $\sim p$ é uma proposição verdadeira, então $p$ é uma proposição falsa.

Na opção (A), a proposição $p$ é falsa e a proposição $q$ é falsa.

Na opção (B), a proposição $p$ é verdadeira e a proposição $q$ é falsa.

Na opção (C), a proposição $p$ é verdadeira e a proposição $q$ é verdadeira.

Na opção (D), a proposição $p$ é falsa e a proposição $q$ é verdadeira.

**3. Opção (B)**

$$\sim (\forall x, (x \leq 2 \vee x > 1)) \Leftrightarrow \exists x: \sim (x \leq 2 \vee x > 1)$$

$$\Leftrightarrow \exists x: (x > 2 \wedge x \leq 1)$$

**4. Opção (B)**

$$x^3 + x^2 + 2x = -x^3 + x^2 \Leftrightarrow 2x^3 + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(x^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0 \quad \vee \quad \underbrace{x^2 + 1 = 0}_{\text{Equação impossível em } \mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

A equação é possível em $\mathbb{R}$ e o seu conjunto-solução é $\{0\}$.

**5. Opção (A)**

$2x - \frac{1}{2} \leq 3x \Leftrightarrow -x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

Logo, $A = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

$3x > -4 \ \wedge \ 4x \leq 9 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{3} \ \wedge \ x \leq \frac{9}{4}$

Logo, $B = \left]-\frac{4}{3}, \frac{9}{4}\right] \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0, 1, 2\}$.

Assim, $B \backslash A = B \cap \bar{A} = \{-1, 0, 1, 2\} \cap \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[ = \{-1\}$.

## Grupo II

**1.**

**1.1.**

**1.1.1.** "Um quadrado é um retângulo e um retângulo não é um paralelogramo e um quadrado é um paralelogramo."

**1.1.2.** "Se um quadrado não é um retângulo, então nem um retângulo é um paralelogramo nem um quadrado é um paralelogramo."

**1.2.** $(p \wedge q) \Rightarrow \sim r$

Negação: $\sim\big((p \wedge q) \Rightarrow \sim r\big) \Leftrightarrow \sim(\sim(p \wedge q) \vee \sim r)$

$\Leftrightarrow \sim\big(\sim(p \wedge q)\big) \wedge \sim(\sim r)$

$\Leftrightarrow p \wedge q \wedge r$

**1.3.** A proposição $p$ é falsa, a proposição $q$ é verdadeira e a proposição $r$ é verdadeira.

Assim, $\sim r$ é uma proposição falsa e $q \wedge \sim r$ é uma proposição falsa (por se tratar da conjunção de duas proposições em que uma delas é falsa). Logo, $p \Rightarrow (q \wedge \sim r)$ é uma proposição verdadeira (por se tratar de uma implicação em que o antecedente e o consequente são ambos falsos) e $\sim\big(p \Rightarrow (q \wedge \sim r)\big)$ é uma proposição falsa.

**2.**

**2.1.**

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim p \Rightarrow q$ | $\sim q$ | $(p \wedge \sim q)$ | $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge \sim q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | V | F | F | F |
| V | F | F | V | V | V | V |
| F | V | V | V | F | F | F |
| F | F | V | F | V | F | V |

As colunas correspondentes a $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow (p\ \wedge \sim q)$ e a $\sim q$ são iguais, logo as proposições $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow (p\ \wedge \sim q)$ e $\sim q$ são equivalentes.

**2.2.** $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow (p\ \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \Rightarrow q) \vee (p \wedge \sim q)$

$\Leftrightarrow \sim(p \vee q) \vee (p \wedge \sim q)$

$\Leftrightarrow (\sim p\ \wedge\ \sim q) \vee (p \wedge \sim q)$

$\Leftrightarrow \sim q\ \wedge\ (\sim p \vee p)$

$\Leftrightarrow \sim q\ \wedge\ \mathrm{V}$

$\Leftrightarrow \sim q$

**3.** Como $\big(p\ \vee (\sim q \Rightarrow r)\big) \wedge \sim(q \vee r)$ é uma proposição verdadeira, tem-se que as proposições $\big(p \vee (\sim q \Rightarrow r)\big)$ e $\sim(q \vee r)$ são verdadeiras.

Sendo $\sim(q \vee r)$ uma proposição verdadeira, então $q \vee r$ é uma proposição falsa, logo $q$ e $r$ são ambas proposições falsas.

Uma vez que $q$ e $r$ são proposições falsas, vem que $\sim q$ é uma proposição verdadeira e, então, $\sim q \Rightarrow r$ é uma proposição falsa.

Para que $\big(p\ \vee\ (\sim q \Rightarrow r)\big)$ seja uma proposição verdadeira, tem-se, então, que $p$ é uma proposição verdadeira.

Logo, o João vai ao cinema.

**4.**

**4.1.** $x^2 + 4 \geq 0$ é uma condição possível universal em $\mathbb{Z}^-$.

**4.2.** $x^3 - 8 = 0\ \ \wedge\ \ |x| \leq 2 \Leftrightarrow x = 2\ \ \wedge\ \ (x \geq -2\ \ \wedge\ \ x \leq 2)$

$\Leftrightarrow x = 2$

Logo, a condição é possível não universal em $\mathbb{R}$.

**5.**

**5.1.** $p(x): x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2}{2}$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$

$q(x): x - \frac{5}{4} \geq -\frac{x+1}{2} \Leftrightarrow 4x - 5 \geq -2x - 2$

$\Leftrightarrow 6x \geq 3$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$

$r(x): x^2 > 9 \Leftrightarrow x > 3 \vee x < -3$

Assim, o conjunto-solução de $p(x) \vee \left(q(x) \wedge r(x)\right)$ é:

$\{1,3\} \cup \left(\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[ \cap \left(\left]-\infty, -3\right[ \cup \left]3, +\infty\right[\right)\right) = \{1,3\} \cup \left]3, +\infty\right[ =$

$= \{1\} \cup \left[3, +\infty\right[$

**5.2.** Se, por exemplo, $x = 1$, então $q(1)$ é uma proposição verdadeira e $r(1)$ é uma proposição falsa, pelo que $q(1) \Rightarrow r(1)$ é uma proposição falsa e, portanto, a proposição $\forall x, q(x) \Rightarrow r(x)$ é falsa.

**5.3.** $\sim\left(\exists x: p(x) \Rightarrow q(x)\right) \Leftrightarrow \forall x, \sim\left(\sim p(x) \vee q(x)\right)$

$\Leftrightarrow \forall x, p(x) \wedge \sim q(x)$

$\Leftrightarrow \forall x, x^2 - 4x + 3 = 0 \wedge x - \frac{5}{4} < -\frac{x+1}{2}$

**5.4.** $P = \{1,3\}$

$Q = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

$\bar{P} \cap Q = \mathbb{R} \backslash \{1,3\} \cap \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[ = \left[\frac{1}{2}, 1\right[ \cup \left]1,3\right[ \cup \left]3, +\infty\right[ = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[ \backslash \{1,3\}$

**6.** Para provar que $\forall n \in \mathbb{N}, 3n + 5$ é um número natural ímpar $\Rightarrow$ $n$ é um número natural par, vamos provar a implicação contrarrecíproca:

$n$ é um número natural ímpar $\Rightarrow$ $3n + 5$ é um número natural par

Suponhamos que $n$ é um número natural ímpar. Então, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2k + 1$. Logo, $3n = 3 \times (2k + 1) = 2 \times 3k + 3$ é um número ímpar. Tem-se então que $3n + 5$ é a soma de um número ímpar com outro número ímpar e, portanto, é um número par.