BANCO DE QUESTÕES – MATEMÁTICA A 11.º ANO

DOMÍNIO: Funções Reais de Variável Real

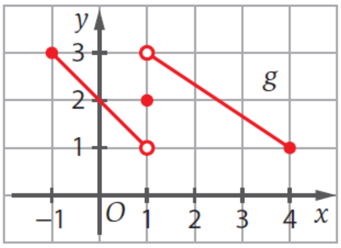
1. Seja f a função real de variável real definida por $f(x)=1-x^2$.

Qual das seguintes expressões define uma sucessão (u_n) tal que $\lim f(u_n)=-3$?

(A) $u_n=\frac{-3}{n}$ **(B)** $u_n=-\frac{2}{n}$

(C) $u_n=\frac{-3n}{n+1}$ **(D)** $u_n=\frac{-2n}{n+1}$

2. Na figura, está representado o gráfico de uma função g de domínio $[-1,4]$.



2.1 Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n=1-\frac{n}{1-n^2}$.

Qual das seguintes proposições é verdadeira?

(A) $\lim g(u_n)=3$ **(B)** $\lim g(u_n)=2$

(C) $\lim g(u_n)=1$ **(D)** Não existe $\lim g(u_n)$

2.2 Qual das seguintes proposições é verdadeira?

(A) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=3$ **(B)** $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=2$

(C) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=1$ **(D)** Não existe $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

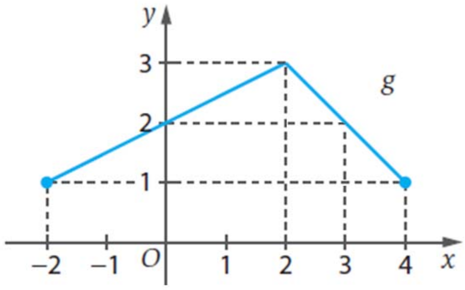
2.3 Qual das seguintes proposições é verdadeira?

(A) $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=1$ **(B)** $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=2$

(C) $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=2$ **(D)** $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=1$

Carlos Andrade, Pedro Pimenta e Simone Azevedo

3. Seja f a função real de variável real definida por $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ e seja g a função cujo gráfico se representa na figura ao lado.



3.1 Qual é o domínio da função $f \circ g$?

(A) $[-2,2]$ **(B)** $[-2,4]$

(C) $[-2,0]\cup[3,4]$ **(D)** $[0,3]$

3.2 Qual é o contradomínio da função $g \circ f$?

(A) $[0,2]$ **(B)** $[0,3]$ **(C)** $[1,3]$ **(D)** $[2,3]$

3.3 Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 2}(f\times g)(x)$?

(A) $-3\sqrt{2}$ **(B)** 0 **(C)** 2 **(D)** $3\sqrt{2}$

3.4 Qual dos seguintes limites existe?

(A) $\lim\limits_{x\to 1}(f\circ g)(x)$ **(B)** $\lim\limits_{x\to 2}(f\circ g)(x)$

(C) $\lim\limits_{x\to -2}(g\circ f)(x)$ **(D)** $\lim\limits_{x\to 4}(g\circ f)(x)$

4. Sejam f a função polinomial definida por $f(x)=x^2-x-2$ e g a função, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, definida por $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$.

4.1 Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $\lim\limits_{x\to 1^-}(f\times g)(x)=-\infty$ **(B)** $\lim\limits_{x\to 1^+}(f\times g)(x)=+\infty$

(C) $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)=+\infty$ **(D)** $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=-\infty$

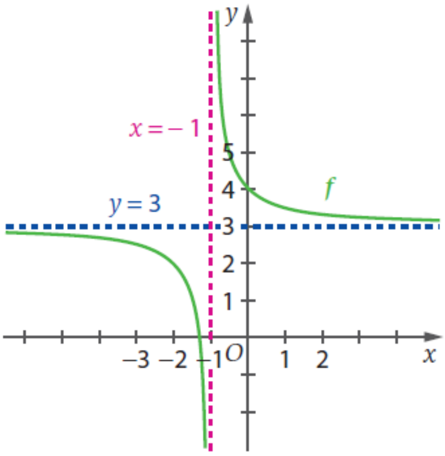
4.2 Quantas assíntotas verticais tem o gráfico da função $\dfrac{f}{g}$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3

4.3 Quantas assíntotas verticais tem o gráfico da função $\dfrac{g}{f}$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3

5. Na figura, está representada graficamente, em referencial o.n., a função racional f definida por uma expressão do tipo $y = a + \frac{b}{x-c}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$.



5.1 Quais são os valores de a e c?

(A) $a = 3$ e $c = -1$ **(B)** $a = 1$ e $c = 3$

(C) $a = 3$ e $c = 1$ **(D)** $a = -1$ e $c = 3$

5.2 Qual é o valor de b, sabendo-se que $f(0) = 4$?

(A) -1 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 4

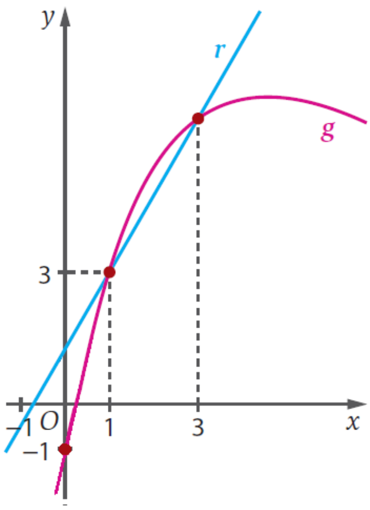
5.3 Seja g a função, real de variável real, definida por $g(x) = f(x-2)$.

Quais das seguintes equações definem as assíntotas ao gráfico da gunção g?

(A) $y = 3$ e $x = -3$ **(B)** $y = 3$ e $x = 1$

(C) $y = 1$ e $x = -1$ **(D)** $y = 1$ e $x = -1$

6. No referencial o.n. da figura, estão representados parte do gráfico da função g e a reta r, secante ao gráfico de g nos pontos de abcissas 1 e 3.



Sabe-se que:

- a inclinação da reta r é 60°;
- $g(0) = -1$ e $g(1) = 3$.

6.1 O valor de $\text{tmv}_{g,[0,1]}$ é:

(A) -4 **(B)** $-\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{4}$ **(D)** 4

6.2 O valor de $g(3)$ é:

(A) $3 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ **(B)** $3 + 2\sqrt{3}$ **(C)** $3 + \sqrt{2}$ **(D)** $3 + \frac{2\sqrt{2}}{3}$

7. Seja g a função definida, em $\mathbb{R}$, para cada valor de $k \geq -1$, por:

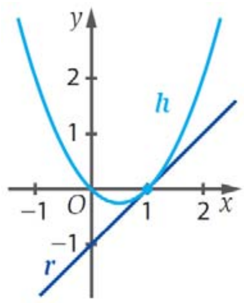
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{x^2+3x+2} & \text{se } x>-1\\ \sqrt{k-x} & \text{se } x\leq -1\end{cases}$$

Qual é o valor de k para o qual f é contínua em $x=-1$?

(A) 0 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 8

8. No referencial o.n. da figura, estão representados parte do gráfico da função h e a reta r, tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 1.

A reta r interseta o eixo Ox no ponto de abcissa 1 e o eixo Oy no ponto de ordenada -1.



8.1 O valor de $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}$ é:

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** 2

8.2 Sabe-se que h é uma função quadrática com zeros 0 e 1.

8.2.1 Qual é a solução da equação $h'(x)=0$?

(A) 0 **(B)** $\dfrac{1}{4}$ **(C)** $\dfrac{1}{2}$ **(D)** 1

8.2.2 Qual das seguintes é uma expressão analítica de h?

(A) $\dfrac{1}{2}x(x+1)$ **(B)** $x(x+1)$ **(C)** $\dfrac{1}{2}x(x-1)$ **(D)** $x(x-1)$

9. Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, cujo gráfico tem uma assíntota de equação $y=-1$.

Qual das seguintes expressões pode definir a função derivada de g?

(A) $g'(x)=\dfrac{1-x}{x+1}$ **(B)** $g'(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

(C) $g'(x)=1-x$ **(D)** $g'(x)=(1+x)^2$

10. Uma certa quantidade de um ácido, a, em litros, foi adicionada a 2 litros de água.

10.1 Mostra que a percentagem, p, de ácido presente na solução é dada, pela expressão

$$p(a)=\frac{100a}{2+a} \quad (a>0).$$

10.2 Determina a percentagem de ácido na solução, se forem adicionados 5 dL do mesmo aos 2 litros de água.

10.3 Determina, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a quantidade de ácido adicionado aos 2 litros de água para que a percentagem deste na solução seja 67%.

Na tua resposta:

- equaciona o problema;
- reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que te permite(m) resolver a equação;
- apresenta o resultado em decilitros, arredondado às unidades.

11. Um certo tanque pode ser enchido por duas torneiras de caudal constante. Utilizando apenas uma das torneiras, o tanque fica cheio ao fim de 10 horas. Utilizando apenas a outra torneira, o tanque fica cheio ao fim de t horas.

Considera agora que as duas torneiras são utilizadas em simultâneo.

11.1 Mostra que o número de horas, h, necessárias para que o tanque fique cheio é dado, em função de t, por:

$$h(t)=\frac{10t}{10+t} \quad (t>0)$$

11.2 Determina o número de horas necessárias para que o tanque fique cheio, considerando $t=10$. Interpreta o resultado obtido.

11.3 Determina $\lim\limits_{t\to 0} h(t)$ e $\lim\limits_{t\to +\infty} h(t)$. Interpreta os resultados obtidos.

11.4 Determina t de modo que o tempo necessário ao enchimento do tanque, com as duas torneiras, seja 2 horas.

12. Calcula os seguintes limites, começando por identificar, caso exista, o tipo de indeterminação.

12.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-1}$

12.2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$

12.3 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3-1}$

12.4 $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$

12.5 $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{\sqrt{x^4-8x^2+16}}{|x+2|}$

12.6 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

13. Determina o conjunto de pontos de continuidade de cada uma das seguintes funções reais de variável real.

13.1 $f(x)=\dfrac{x-3}{\sqrt{3-x^2}}$

13.2 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{3x+3}{\sqrt{x^2-1}} & \text{se } x<-1 \vee x>1\\ 3x+3 & \text{se } -1\le x\le 1\end{cases}$

14. Estuda as seguinte funções quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico. Caso existam, escreve as respetivas equações.

14.1 $f(x)=\dfrac{2x^3-10x}{x^2+3}$

14.2 $g(x)=\dfrac{3x^2-1}{2-x}$

15. Seja f uma função diferenciável no intervalo $[-1,\ 1]$ tal que:

- $f(1)=3$
- $\forall x\in\,]-1,1[,\ -2<f'(x)<4$

Determina os possíveis valores de $f(-1)$.

Sugestão: Utiliza o teorema de Lagrange, aplicado à função f, no intervalo $[-1,\ 1]$.

16. Seja g a função, real de variável real, definida por $g(x)=-x^4+18x^2+19$.

Determina os intervalos de monotonia da função g e identifica os respetivos extremos relativos e absolutos, caso existam.

17. Seja g a função real de variável real definida por $f(x)=\frac{2x^3-10x}{x^2+3}$.

Determina os intervalos de monotonia da função f e identifica os respetivos extremos relativos e absolutos, caso existam.

18. Sejam f e g funções, de domínio $\mathbb{R}$, tais que:

- f é par;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-2$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-2x\right)=1$;
- $g(x)=2f(x)$.

Verifica que o gráfico de g tem uma assíntota oblíqua em $-\infty$ e indica a respetiva equação reduzida.

19. Um pintor pretende utilizar uma tela retangular para fazer uma pintura, de forma também retangular, com $2400\ \text{cm}^2$ de área, com margens brancas em toda à volta. A largura das margens superior e inferior deverá ser $3\ \text{cm}$ e a das margens laterais deverá ser $2\ \text{cm}$.

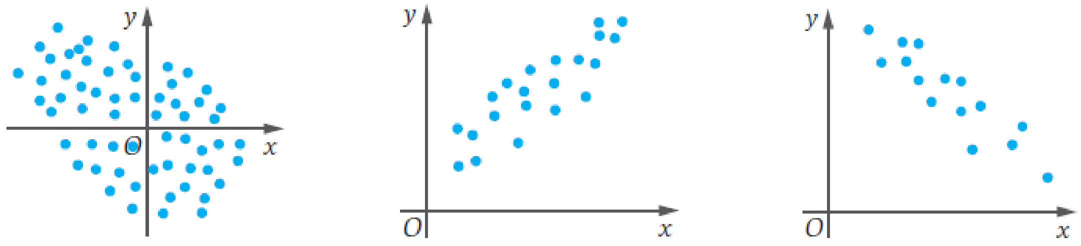
Determina a área mínima da tela a utilizar pelo pintor.

Apresenta o valor pedido em cm^2.

DOMÍNIO: Estatística

1. Nos referenciais seguintes, estão representadas três nuvens de pontos.

(I) **(II)** **(III)**



Faz corresponder a cada nuvem de pontos um dos seguintes coeficientes de correlação linear:

$r_1 = 0,86$ $\qquad$ $r_2 = -0,39$ $\qquad$ $r_3 = -0,89$

2. Na tabela seguinte, apresentam-se os dados relativos ao número de horas de estudo de sete alunos para um teste de Matemática e à classificação obtida por cada um.

Tempo de estudo (horas)	3	1	5	10	6	8	9
Classificação (valores)	7	4	7	14	10	12	16

2.1 Representa, num referencial ortonormado do plano, a nuvem de pontos desta amostra.

2.2 Recorrendo a uma calculadora, obtém o coeficiente de correlação linear desta amostra. Apresenta esse valor arredondado às centésimas.

Classifica a associação linear entre as variáveis estatísticas.

2.3 Recorrendo a uma calculadora, determina a equação reduzida da reta de mínimos quadrados relativa a esta amostra.

Utiliza essa equação para obteres uma estimativa da classificação obtida por um aluno que tenha estudado 7 horas. Apresenta o resultado arredondado às unidades.

Carlos Andrade, Pedro Pimenta e Simone Azevedo

3. Numa experiência para determinar a densidade de uma substância, em g/cm^3, fizeram-se medições da massa, em gramas, e do volume, em cm^3, de amostras dessa substância. Na tabela seguinte apresentam-se os resultados dessas medições.

Massa (g)	11	19	26	45	57
Volume (cm^3)	51	107	153	224	295

Obtém uma estimativa para o volume, em cm^3, arredondado às unidades, de uma amostra desta substância com 35 gramas de massa.

Na tua resolução, começa por determinar, recorrendo a uma calculadora, a equação reduzida da reta de mínimos quadrados relativa a este conjunto de dados. Considera coeficientes da equação arredondados com, pelo menos, três casas decimais.

Carlos Andrade, Pedro Pimenta e Simone Azevedo

SOLUÇÕES

Funções Reais de Variável Real

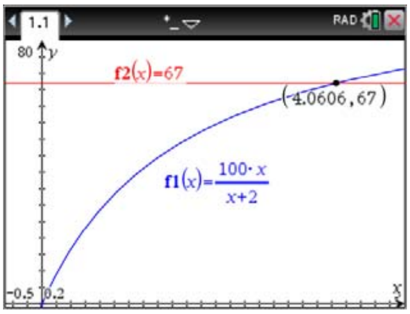
1. **(D)**
2.1 **(A)**
2.2 **(D)**
2.3 **(A)**
3.1 **(C)**
3.2 **(D)**
3.3 **(B)**
3.4 **(C)**
4.1 **(C)**
4.2 **(A)**
4.3 **(D)**
5.1 **(A)**
5.2 **(B)**
5.3 **(B)**
6.1 **(D)**
6.2 **(B)**
7. **(C)**
8.1 **(C)**
8.2.1 **(C)**
8.2.2 **(D)**
9. **(B)**

10.1 A quantidade de ácido presente na solução é a litros; a solução tem $2+a$ litros; assim, a percentagem de ácido é dada por $\frac{a}{2+a}\times 100$, ou seja, $p(a)=\frac{100a}{2+a}$.

10.2 20%

10.3 A quantidade de ácido adicionado aos 2 litros de água para que a percentagem deste na solução seja 67% é a solução da equação $\frac{100a}{2+a}=67$.

A quantidade de ácido adicionado é aproximadamente 41 dL.



11.1 Sendo V o volume do tanque, as torneiras têm caudais $\frac{V}{10}$ e $\frac{V}{t}$; em simultâneo, demoram $V/\left(\frac{V}{10}+\frac{V}{t}\right)$ horas a encher o tanque; assim, tem-se $h(t)=\frac{10t}{10+t}$.

11.2 5 horas; para $t=10$, as duas torneiras têm o mesmo caudal, logo, em simultâneo, demoram metade do tempo que cada uma demoraria isoladamente.

11.3 $\lim\limits_{t\to 0} h(t)=0$ – corresponde à situação em que o caudal da 2ª torneira tenderia para infinito, o que conduziria a um tempo de enchimento a tender para zero, quer se usasse apenas esta torneira $(t\to 0)$ ou as duas em simultânio $(h(t)\to 0)$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} h(t) = 10$ – corresponde à situação em que apenas a 1ª torneira está a encher o tanque, já que a 2ª torneira demoraria um tempo tendencialmente infinito, ou seja, estaria fechada.

11.4 $t = 2{,}5$ horas

12.1 $\frac{\infty}{\infty}$; 0 **12.2** $\frac{\infty}{\infty}$; -1 **12.3** $\frac{0}{0}$; 1

12.4 $-\infty$ **12.5** $\frac{0}{0}$; 4 **12.6** $\infty - \infty$; $-\infty$

13.1 f é contínua em $\left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$ (no seu domínio).

13.2 g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

14.1 O gráfico de f tem uma assíntota oblíqua de equação $y = 2x$ (em $-\infty$ e $+\infty$).

14.2 O gráfico de g tem uma assíntota vertical (bilateral) de equação $x = 2$ e uma assíntota oblíqua de equação $y = -3x - 6$ (em $-\infty$ e $+\infty$).

15. $-5 < f(-1) < 7$

16. g é crescente em $\left]-\infty, -3\right]$ e em $[0, 3]$; g é decrescente em $[-3, 0]$ e em $\left[3, +\infty\right[$; $g(-3) = g(3) = 100$ é o máximo absoluto (também relativo) de g e $g(0) = 19$ é um mínimo relativo de g.

17. f é crescente em $\left]-\infty, -1\right]$ e em $\left[1, +\infty\right[$; g é decrescente em $[-1, 1]$; $f(-1) = 2$ é um máximo relativo de f e $f(1) = -2$ é um mínimo relativo de f.

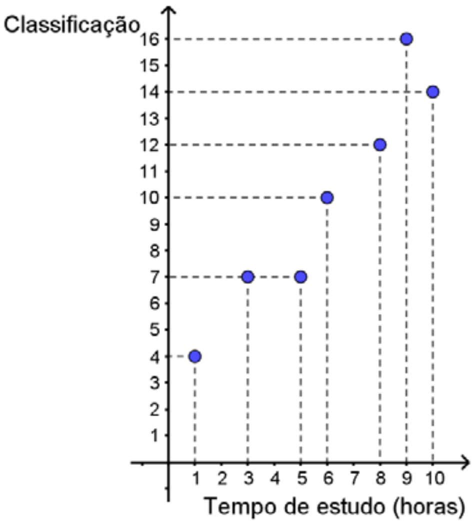
18. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = 4$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (g(x) - 4x) = 2$. Equação da assíntota: $y = 4x + 2$.

19. 2904 cm^2

Estatística

1. (II) - $r_1 = 0,86$; (I) - $r_2 = -0,39$; (III) - $r_3 = -0,89$

2.1



2.2 $r \approx 0,95$. A associação linear é positiva e forte.

2.3 Sendo y a classificação, em valores, e x o tempo de estudo, em horas, a equação reduzida da reta de mínimos quadrados é: $y = 1,25x + 2,5$.

A estimitiva pedida é 11 valores.

3. Equação reduzida da reta de mínimos quadrados: $y = 5,030x + 7,056$

Estimativa pedida: 183 cm^3