BANCO DE QUESTÕES – MATEMÁTICA A 11.º ANO

DOMÍNIO: Geometria Analítica (no espaço)

1. Considera, num referencial o.n. do espaço, os plano definidos pelas seguintes equações:

$$x+y+z=1 \quad \text{e} \quad -x-y-z=1$$

A interseção dos dois planos é:

(A) o conjunto vazio. **(B)** um ponto. **(C)** uma reta. **(D)** um plano.

2. Considera, num referencial o.n. do espaço, o plano α definido por $y=\sqrt{3}x-1$ e a reta r definida por $(x,y,z)=\left(1,\sqrt{3},0\right)+k\left(\sqrt{3},-1,0\right)$, $k\in\mathbb{R}$.

Qual das afirmações é verdadeira ?

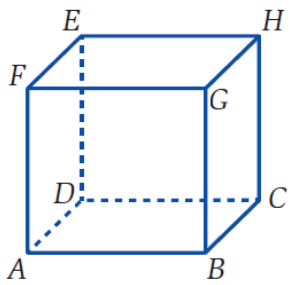
(A) A reta r é paralela ao plano α .

(B) A reta r está contida no plano α .

(C) A reta r é perpendicular ao plano α .

(D) A reta r é concorrente, mas não perpendicular ao plano α .

3. Considera o cubo $[ABCDEFGH]$, de aresta 1, representado na figura.

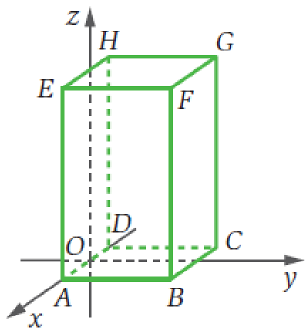


Fixa-se, na figura, um referencial ortonormado do espaço, com origem no ponto A, com unidade de comprimento igual à aresta do cubo, tal que B está contido no semieixo positivo das ordenadas, D está contido no semieixo negativo das abcissas e F está contido no semieixo positivo das cotas.

Determina, relativamente a esse referencial, a equação cartesiana do plano ADH na forma $ax+by+cz=d$.

Carlos Andrade, Pedro Pimenta e Simone Azevedo
Matemática A 11.º ano

4. Na figura ao lado, está representado, em referencial o.n. do espaço, o prisma reto $[ABCDEFGH]$, de bases quadradas paralelas ao plano xOy. As coordenadas dos vértices A, B e G são, respetivamente, $(3,0,0)$, $(3,6,0)$ e $(-3,6,12)$.



4.1 Obtém uma equação vetorial do plano AFG.

4.2 Determina uma equação cartesiana do plano que contém o ponto F e é perpendicular à reta DF.

4.3 Seja α o plano que contém reta BC e que passa no ponto de coordenadas $(0,-6,20)$.

Determina as coordendas do ponto de interseção do plano α com o eixo Oz.

Carlos Andrade, Pedro Pimenta e Simone Azevedo

DOMÍNIO: Sucessões

1. Considera a sucessão (a_n) de termo geral $a_n = \frac{1}{2n+1}$.

1.1 Calcula a_2 .

1.2 Mostra que $\frac{1}{31}$ é termo da sucessão (a_n) e identifica a respetiva ordem.

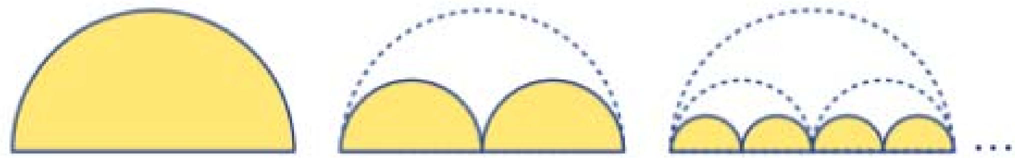
1.3 Estuda (a_n) quanto à monotonia.

1.4 Justifica que (a_n) não é uma progressão aritmética nem uma progressão geométrica.

1.5 A sucessão (a_n) é convergente? E limitada? Justifica as tuas respostas.

2. Justifica que a expressão $\frac{1}{n-1}$ não pode ser o termo geral de uma sucessão.

3. Na figura seguinte, estão representados os três primeiros termos de uma sucessão de construções geométricas.



Tal como a figura sugere:

- a primeira construção é um semicírculo de raio 1 ;
- cada construção, a partir da segunda, é constituída pelo dobro dos semicírculos, com metade do raio, do que a construção anterior.

3.1 Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja u_n o número de semicírculos da construção de ordem n.

a. Justifica que a sucessão (u_n) é um sucessão monótona.

b. Apresenta o termo geral de (u_n).

c. Determina o número de semicírculos da décima construção.

3.2 Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja v_n a área sombreada da construção de ordem n.

a. Justifica que a sucessão (v_n) é definida por $v_n = \frac{\pi}{2^n}$.

b. Calcula $\lim(v_n)$ e interpreta o resultado no contexto da situação.

c. Justifica que a sucessão (v_n) é limitada.

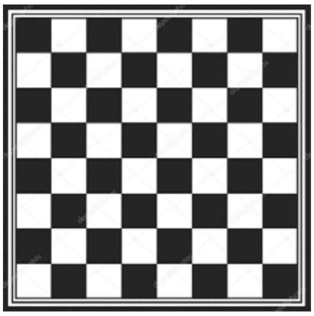
Carlos Andrade, Pedro Pimenta e Simone Azevedo

3.3 Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja w_n o perímetro da construção de ordem n.

a. Calcula os dois primeiros termos de (w_n).

b. Obtém o termo geral de (w_n) e conclui que (w_n) é uma sucessão constante.

4. Uma das lendas a respeito da origem do jogo de xadrez conta que o jogo foi criado por um jovem inventor para entreter um rei da Índia. O rei ficou maravilhado e quis recompensar o jovem. Perguntou-lhe que presente desejava e a resposta foi surpreendente. O jovem pediu:



- 1 grão de trigo pela 1ª casa do tabuleiro;
- 2 grãos de trigo pela 2ª casa;
- 4 grãos de trigo pela 3ª casa;
- 8 grãos de trigo pela 4ª casa;
- e assim sucessivamente.

4.1 Justifica que os termos consecutivos da sequência de grãos de trigo, do menor para o maior, estão em progressão geométrica, e identifica a respetiva razão.

4.2 Parece que não foi possível ao rei cumprir a promessa, dado que, para tal, não chegava sequer toda a produção mundial de trigo da altura.

Calcula o número de grãos de trigo que o rei teria de oferecer ao jovem para cumprir a recompensa.

Apresenta o resultado em notação científica, na forma $a \times 10^b$, com a arredondado às centésimas e b inteiro.

5. Considera a sucessão (u_n) definida por recorrência como se segue:

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n, \quad \text{para } \ n \geq 2 \end{cases}$$

5.1 Determina o terceiro termo da sucessão (u_n).

5.2 Apresenta o termo geral da sucessão (u_n).

5.3 (u_n) é uma sucessão limitada? Justifica a tua resposta.

6. Considera a sucessão (v_n) de termo geral $v_n = -2n - 3$.

6.1 Define (v_n) por recorrência.

6.2 Justifica que (v_n) é uma progressão aritmética e identifica a respetiva razão.

7. Prova, por indução matemática, que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ é múltiplo de 3 .

8. Seja (w_n) a sucessão definida por $w_n = \frac{2n}{3n+1}$. Mostra, por definição, que $w_n \to \frac{2}{3}$.

Carlos Andrade, Pedro Pimenta e Simone Azevedo

SOLUÇÕES

Geometria Analítica (no espaço)

1. (A)

2. (C)

3. $-y+z=0$

4.1 Por exemplo:

$$P=A+s\overrightarrow{AF}+t\overrightarrow{GF}\ \left(s,t\in\mathbb{R}\right)\Leftrightarrow\left(x,y,z\right)=\left(3,0,0\right)+s\left(0,6,12\right)+t\left(6,0,0\right)\ \left(s,t\in\mathbb{R}\right)$$

4.2 $6\left(x-3\right)+6\left(y-6\right)+12\left(y-12\right)=0$ (ou equivalente)

4.3 $\left(0,0,10\right)$

Sucessões

1.1 $a_2 = \frac{1}{5}$

1.2. $\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{31} \Leftrightarrow n = 15$.

Trata-se do 15º termo.

1.3 $a_{n+1} - a_n = -\frac{2}{(2n+3)(2n+1)} < 0$;

portanto, para qualquer número natural n, $a_{n+1} < a_n$, pelo que a sucessão é monótona decrescente.

1.4 $a_{n+1} - a_n$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ não são constantes.

(Em alternativa, pode verificar-se que não existe razão aditiva nem multiplicativa entre três termos consecutivos).

1.5 $\lim(a_n) = 0$. A sucessão é convergente e, portanto, limitada.

2. $\frac{1}{n-1}$ não está definido para $n = 1$, pelo que não pode definir uma função de domínio $\mathbb{N}$.

3.1

a. O número de semicírculos é crescente.

b. $u_n = 2^{n-1}$

c. 512

3.2

a. $v_n = \frac{\pi \times \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2}{2} \times 2^{n-1} = \frac{\pi}{2^n}$

b. $\lim(v_n) = 0$. A área sombreada da construção tende para zero quando o número de círculos tende para $+\infty$.

c. Por exemplo, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < v_n \leq \frac{\pi}{2}$.

(Em alternativa, pode referir-se que a sucessão é convergente).

3.3

a. $w_1 = w_2 = 2 + \pi$

b. $w_n = 2 + \pi$, pelo que a sucessão é constante.

4.1 O quociente entre quaisquer dois termos consecutivos é constante (2).

4.2 $2^{64} - 1 \approx 1{,}85 \times 10^{19}$

5.1 $u_3 = 45$

5.2 $u_n = 5 \times 3^{n-1}$

5.3 $u_n \to +\infty$; logo, a sucessão não é limitada.

6.1

$$\begin{cases} v_1 = -5 \\ v_{n+1} = v_n - 2, \quad \text{para} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

6.2 $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = -2$; $r = -2$.