TESTE DE AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA - 11.º ANO
PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

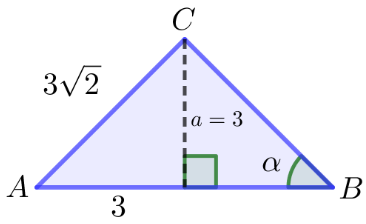
1.

$9 = \frac{6 \times a}{2} \Leftrightarrow a = 3$; $\overline{AC}^2 = 3^2 + 3^2 \underset{\overline{AC}>0}{\Leftrightarrow} \overline{AC} = 3\sqrt{2}$

$\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Sendo assim, $2\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Opção correta: (D)



2.

$y = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow \sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Como $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tem-se que $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$.

$y = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \sin y = \frac{1}{2}$. Como $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tem-se que $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} + 2 \times \frac{\pi}{6} = 0$

Opção correta: (A)

3. Como $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$ têm sentidos contrários e $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = 3$, temos $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = -3 \times 3 = -9$.

Opção correta: (A)

4.

$m = \tan\alpha = \frac{2}{3}$, com $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

$1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{13}{9} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

Como $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$.

Opção correta: (C)

5.

$r = 5$; $u_1 = 2$; $u_n = u_1 \times r^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 2 \times 5^{n-1}$.

Opção correta: (B)

6.1 $\overline{OC} = \frac{3}{2}$;

$\alpha \in \left]0, \pi\right[$, $\overline{BC} = \sin\alpha$; $\overline{AB} = \frac{3}{2} + (-\cos\alpha) = \frac{3}{2} - \cos\alpha$

A área do trapézio $[OABC]$ é dada, em função de α , por :

$$\frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \cos\alpha}{2} \times \sin\alpha = \frac{3 - \cos\alpha}{2} \times \sin\alpha$$

6.2 Se $\overline{BC} = \frac{1}{2}$ e $\alpha \in \left]0, \pi\right[$, tem-se $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ou $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

Se $\alpha = \frac{\pi}{6}$, a área do trapézio é $\frac{3 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2} \times \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{6 - \sqrt{3}}{8}$.

Se $\alpha = \frac{5\pi}{6}$, a área do trapézio é $\frac{3 - \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{2} \times \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{6 + \sqrt{3}}{8}$.

6.3

$\overline{AB} = 2$ e $\overline{AB} = \frac{3}{2} - \cos\alpha$, sendo que $2 = \frac{3}{2} - \cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2}$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{3}{4} \underset{\alpha \in \left]0, \pi\right[}{\Leftrightarrow} \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(ou $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ e $\alpha \in \left]0, \pi\right[$, então $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ e $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$).

A área do trapézio é $\frac{3 + \frac{1}{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{8}$.

7. Por exemplo, determine-se o máximo da função g: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3\sin x \leq 3$.

Maximizante da função g no intervalo $[0, \pi]$: $3\sin x = 3 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

Mínimo da função f: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Coordenadas de C: $\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$; coordenadas de D: $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

As coordenadas do ponto A e do ponto B obtêm-se através da interseção dos gráficos das funções f e g.

$$2 - \sin x = 3\sin x \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \underset{x \in [0,\pi]}{\Leftrightarrow} x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3}.$$

Por exemplo, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$ e $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$.

Coordenadas de A: $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3}{2}\right)$; coordenadas de B: $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{3}{2}\right)$.

8. P tem coordenadas $(0, y)$ com $y \in]1, +\infty[$.

$\overrightarrow{OQ} = (a, b)$; $\overrightarrow{QP} = (-a, y - b)$

$$\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{QP} = 0 \Leftrightarrow -a^2 + yb - b^2 = 0 \Leftrightarrow yb - (a^2 + b^2) = 0 \underset{a^2+b^2=1}{\Leftrightarrow} yb - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{b}$$

9.1 $\overrightarrow{AB}(0, 2, 0)$; $\overrightarrow{AD}(-1, 1, 5)$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 2$; $\|\overrightarrow{AB}\| = 2$; $\|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{27}$

A amplitude do ângulo das retas que contêm as arestas $[AB]$ e $[AD]$ é $\arccos\left(\frac{2}{2 \times \sqrt{27}}\right)$ ou $\arccos\left(\frac{\sqrt{27}}{27}\right)$.

9.2 Seja $\vec{v}(a,b,c)$ um vetor normal ao plano que contém BD e CD.

Tem-se: $\vec{v}\cdot\overrightarrow{BD}=0 \wedge \vec{v}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

$\overrightarrow{BD}=D-B=(-1,-1,5)$; $\overrightarrow{CD}=D-C=(1,-1,5)$

$$\begin{cases}(a,b,c)\cdot(-1,-1,5)=0\\(a,b,c)\cdot(1,-1,5)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-a-b+5c=0\\a-b+5c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-b+5c\\-b+5c-b+5c=0\end{cases} \Leftrightarrow (\ldots)\begin{cases}a=0\\b=5c\end{cases}$$

Obtém-se, então, $\vec{v}(0,\ 5c,\ c)\ (c\in\mathbb{R})$; assim, para $c=1$, por exemplo, temos $\vec{v}(0,5,1)$.

Considerando-se o ponto $D(1,1,5)$ e o vetor $\vec{v}(0,5,1)$:

$5\times1+5=d \Leftrightarrow d=10$

$5y+z=10$ é uma equação cartesiana do plano.

10.1 $u_1=5;\ u_2=0;\ u_3=-5.$

10.2 $u_n=u_{n-1}-5 \Leftrightarrow u_n-u_{n-1}=-5$. Como, para qualquer $n\in\mathbb{N}$, u_n-u_{n-1} é constante, (u_n) é uma progressão aritmética.

10.3 Como, para qualquer $n\in\mathbb{N}$, $u_n-u_{n-1}=-5$, (u_n) é uma sucessão decrescente.

10.4 $u_n=u_1+r(n-1)=5+(-5)(n-1)=5-5n+5=-5n+10$

FIM