TESTE N.º 5 – Proposta de resolução

Caderno 1

1.

1.1. Opção (D)

Sabemos que $A(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, com $\cos\alpha < 0$ e $\operatorname{sen}\alpha > 0$. Assim:

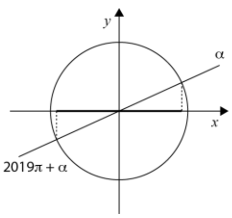
$A_{[OAB]} = \frac{2\operatorname{sen}\alpha \times |\cos\alpha|}{2} = \operatorname{sen}\alpha(-\cos\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

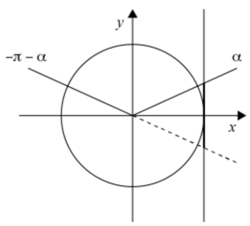
A área do setor circular de ângulo ao centro AOB e raio 1 é dada por $\frac{(2\pi - 2\alpha)\times 1^2}{2} = \pi - \alpha$.

Logo, a área representada a sombreado é dada, em função de α, por:

$$\pi - \alpha - (-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) = \pi - \alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

1.2. $30\cos(2019\pi + \alpha) = 32\operatorname{tg}(-\pi - \alpha) \Leftrightarrow -30\cos\alpha = -32\operatorname{tg}\alpha$





$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{32}{30} \times \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha - \frac{16}{15}\operatorname{sen}\alpha = 0$ (como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, então $\cos\alpha \neq 0$)

$\Leftrightarrow 1 - \operatorname{sen}^2\alpha - \frac{16}{15}\operatorname{sen}\alpha = 0$

$\Leftrightarrow -15\operatorname{sen}^2\alpha - 16\operatorname{sen}\alpha + 15 = 0$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4\times(-15)\times 15}}{-30}$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{16 \pm 34}{-30}$

$\Leftrightarrow \underbrace{\operatorname{sen}\alpha = -\frac{5}{3}}_{\text{condição impossível}} \quad \vee \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$

Como $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, então:

$\frac{9}{25} + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$

Como $\alpha \in 2^{\text{o}}$ Q, então $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$. Assim, as coordenadas do ponto A são $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

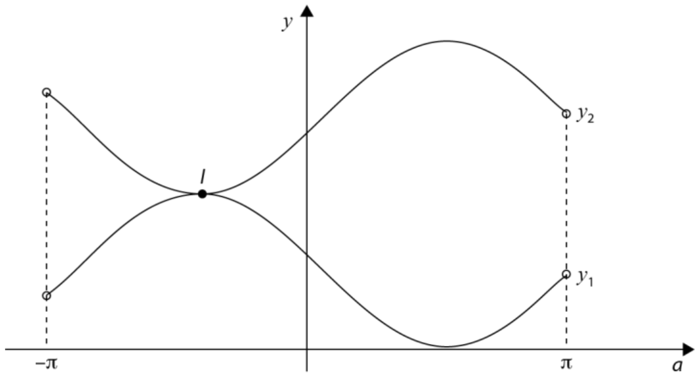
2. Comecemos por determinar quantos dias decorrem desde o início do ano até aos dias 21 de junho e 21 de dezembro:

- até ao dia 21 de junho decorrem 31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 21 = 172 dias;
- até ao dia 21 de dezembro decorrem 365 – 10 = 355 dias.

Tem-se que $f(172) = f(355) + 5{,}433$, isto é:

$\underbrace{12{,}166 + 2{,}717\operatorname{sen}(0{,}017 \times 172 + a)}_{y_1} = \underbrace{17{,}599 + 2{,}717 \times \operatorname{sen}(0{,}017 \times 355 + a)}_{y_2}$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:



$I(a, b)$

$a \approx -1{,}326$

3. Sabemos que $u_{n+1} = u_n + 2, \forall n \in \mathbb{N}$.Tem-se que:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{10^{-3u_{n+1}}}{10^{-3u_n}} = 10^{-3u_{n+1}+3u_n} =$$

$$= 10^{-3(u_n+2)+3u_n} =$$

$$= 10^{-3u_n-6+3u_n} =$$

$$= 10^{-6}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo,$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 10^{-6} v_n$, ou seja, (v_n) é uma progressão geométrica de razão igual a 0,000 001.

4.

4.1. Opção (D)

O plano BGF é paralelo ao plano CHE, logo o vetor de coordenadas $(-6, -2, 3)$ é um vetor normal ao plano BGF. Assim, pode ser definido por:

$$-6(x-1) - 2(y-2) + 3(z+3) = 0 \Leftrightarrow -6x + 6 - 2y + 4 + 3z + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow -6x - 2y + 3z = -19$$

4.2. D é o ponto de interseção da reta AD com o plano CHE.

Comecemos por definir vetorialmente a reta AD:

$$(x, y, z) = (1{,}2, -3) + k(-6, -2{,}3), k \in \mathbb{R}$$

Um ponto genérico da reta AD é do tipo$(1 - 6k, 2 - 2k, -3 + 3k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Substituindo as coordenadas do ponto genérico na equação do plano CHE, obtemos:

$$-6(1-6k) - 2(2-2k) + 3(-3+3k) - 30 = 0 \Leftrightarrow -6 + 36k - 4 + 4k - 9 + 9k - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow 49k = 49$$

$$\Leftrightarrow k = 1$$

Para $k = 1$, obtemos o ponto de coordenadas $(1-6, 2-2, -3+3) = (-5{,}0{,}0)$.

Logo, $D(-5{,}0{,}0)$.

4.3. $B = A + \overrightarrow{AB} = (1,2,-3) + (3,-6,2) = (4,-4,-1)$

O plano BCH pode ser definido por:

$3(x-4) - 6(y+4) + 2(z+1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 12 - 6y - 24 + 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow 3x - 6y + 2z = 34$

A reta CH é a interseção dos planos BCH e CHE:

$$\begin{cases} 3x - 6y + 2z = 34 \\ -6x - 2y + 3z = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 6y - 2z + 34 \\ -2 \times 3x - 2y + 3z = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ -2(6y - 2z + 34) - 2y + 3z = 30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ -12y + 4z - 68 - 2y + 3z = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ -14y + 7z = 98 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ z = 2y + 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 6y - 2(2y + 14) + 34 \\ \underline{} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 6y - 4y - 28 + 34 \\ \underline{} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2y + 6 \\ \underline{} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}y + 2 \\ z = 2y + 14 \end{cases}$$

Um ponto genérico da reta CH é do tipo $\left(2 + \frac{2}{3}y, y, 14 + 2y\right)$, com $y \in \mathbb{R}$.

Logo, uma equação vetorial de CH pode ser:

$$(x, y, z) = (2,0,14) + k\left(\frac{2}{3}, 1, 2\right), k \in \mathbb{R}$$

Caderno 2

5. Opção (C)

$$f(-2) = \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + \arccos\left(-\frac{2a}{4}\right) = \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + \arccos\left(-\frac{a}{2}\right) = \pi$$

$$\Leftrightarrow \arccos\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{a}{2} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{a}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt{2}$$

6.

6.1. Opção (C)

- Em $]-\infty, 2[$:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{6-3x}} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \ \wedge \ \underbrace{\sqrt{6-3x} \neq 0}_{\text{condição universal em }]-\infty,2[}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x = 2}_{2 \notin]-\infty,2[} \ \vee x = -2$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

Em $]-\infty, 2[$, g admite um zero.

- Em $x = 2$:

  $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

  2 é um zero de g.

- Em $]2, +\infty[$:

  $$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4x+4}{x^3-3x^2+2x} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{x(x^2-3x+2)} = 0$$

  $$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{x(x-1)(x-2)} = 0$$

  $$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x(x-1)} = 0 \quad \text{(pois } x \in\ ]2, +\infty[\text{)}$$

  $$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \ \wedge\ x(x-1) \neq 0$$

  $$\Leftrightarrow \underbrace{x = 2}_{2 \notin]2,+\infty[} \ \wedge (x \neq 0 \ \wedge x \neq 1)$$

  g não admite zeros em $]2, +\infty[$.

6.2. Em $]2, +\infty[$:

$$g(x) > \frac{2x+1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x^2-4x+4}{x^3-3x^2+2x} > \frac{2x+1}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{x(x^2-3x+2)} > \frac{2x+1}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{x(x-1)(x-2)} - \frac{2x+1}{x-1} > 0$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{x \neq 2} \frac{x-2}{x(x-1)} - \frac{2x+1}{x-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2-x(2x+1)}{x(x-1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2-2x^2-x}{x^2-x} > 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 - 2x^2 - x > 0 \text{ (pois } x(x-1) > 0, \forall x \in\ ]2, +\infty[\text{)}$$

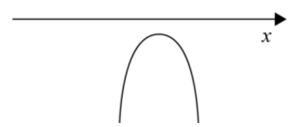
$$\Leftrightarrow -2x^2 - 2 > 0 \text{ condição impossível}$$

$\text{C.S.} = \emptyset$

Cálculo auxiliar

$-2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow -2x^2 = 2$

$\Leftrightarrow x^2 = -1$



6.3. g é contínua em $x = 2$ se e só se existir $\lim_{x\to 2} g(x)$, isto é, $\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^+} g(x) = g(2)$.

- $$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{\sqrt{6-3x}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)\sqrt{6-3x}}{6-3x} =$$

  $$= \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)\sqrt{6-3x}}{-3(x-2)} =$$

  $$= \lim_{x\to 2^-} \frac{(x+2)\sqrt{6-3x}}{-3} =$$

  $$= \frac{4\times 0}{-3} =$$

  $$= 0$$

- $\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4x+4}{x^3-3x^2+2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x-2)}{x(x-2)(x-1)} =$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x(x-1)} =$$

$$= \frac{0}{2\times 1} =$$

$$= 0$$

- $g(2) = 0$

Logo, g é contínua em $x = 2$.

6.4. $h(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4x+4}$

$D_h =]2, +\infty[$

Como o domínio de h é limitado inferiormente, só faz sentido procurar assíntota não vertical quando $x \to +\infty$.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4x+4}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-3x^2+2x}{x^3-4x^2+4x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}} =$$

$$= \frac{1-0+0}{1-0+0} =$$

$$= 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} [h(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4x+4} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-3x^2+2x-x^3+4x^2-4x}{x^2-4x+4} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}} =$$

$$= \frac{1-0}{1-0+0} =$$

$$= 1$$

A reta de equação $y = x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de h quando $x \to +\infty$.

7. Opção (C)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(2^n - 3^n) = \lim_{n\to+\infty}\left[2^n\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)\right] =$$

$$= +\infty \times \left(1-(+\infty)\right) =$$

$$= +\infty \times (-\infty) =$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} g(u_n) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$$

8. Sabemos que $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(-x+1)\right) = 0$, isto é, a reta de equação $y = -x+1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

Logo, $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = -1$.

Como o domínio de g é limitado inferiormente, só faz sentido procurar assíntota horizontal quando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} =$$

$$= -1 + \frac{1}{+\infty} =$$

$$= -1 + 0 =$$

$$= -1$$

Logo, a reta de equação $y = -1$ é assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \to +\infty$ e é a única.