TESTE N.º 4 – Proposta de resolução

Caderno 1

1. Opção (D)

Sabemos que r é perpendicular ao plano α, logo:

$$\frac{-a^2}{-1}=\frac{a}{\frac{1}{2}}=\frac{-4}{-1}\Leftrightarrow a^2=4\ \wedge\ 2a=4\Leftrightarrow(a=-2\ \vee\ a=2)\ \wedge\ a=2\Leftrightarrow a=2$$

Então, $a=2$.

2.

2.1. $f(x)=g(x)$

$$2\text{sen}^2(x)+\text{sen}(x)+1=\text{sen}(x)+\cos(x)+2$$

$$\Leftrightarrow 2\left(1-\cos^2(x)\right)-\cos(x)+1-2=0$$

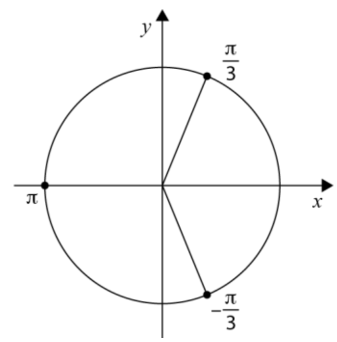
$$\Leftrightarrow -2\cos^2(x)-\cos x+1=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x=\frac{1\pm\sqrt{1-4\times(-2)\times 1}}{-4}$$

$$\Leftrightarrow \cos x=\frac{1\pm 3}{-4}$$

$$\Leftrightarrow \cos x=-1\ \vee\ \cos x=\frac{1}{2}$$

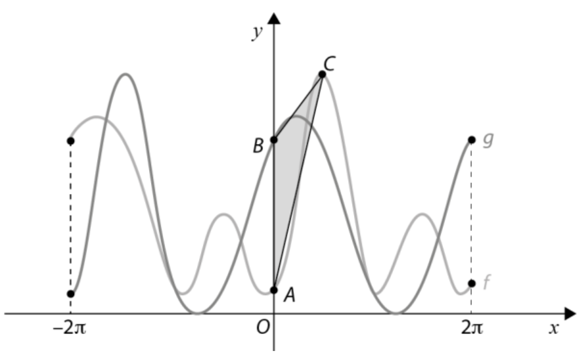
$$\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi\ \vee\ x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ \vee\ x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\,,k\in\mathbb{Z}$$



Em $[-2\pi,2\pi]$, as soluções são:

$x=-\frac{5\pi}{3}$, $x=-\pi$, $x=-\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\pi$ e $x=\frac{5\pi}{3}$

2.2.



$f(0)=1$ e $g(0)=3$

$A(0,1)\qquad B(0,3)\qquad C(a,b)$

$a\approx 1{,}57$ e $b\approx 4{,}00$

$$A_{[ABC]}=\frac{\overline{AB}\times\text{abcissa de } C}{2}\approx\frac{2\times 1{,}57}{2}=1{,}57$$

Assim, a área pedida, com aproximação às décimas, é igual a 1,6 unidades de área.

3. Opção (C)

Sabe-se que $u_n = \frac{n+3}{n+1} = 1 + \frac{2}{n+1}$.

- À medida que n aumenta, também $n+1$ aumenta e, consequentemente, $\frac{2}{n+1}$ diminui e $1+\frac{2}{n+1}$ também diminui. Logo, (u_n) é decrescente.
- $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \frac{2}{n+1} \leq 1$, logo $1 < 1 + \frac{2}{n+1} \leq 2$, ou seja, $\forall n \in \mathbb{N}, 1 < u_n \leq 2$.
- $\lim u_n = 1$, logo (u_n) é convergente.
- $\lim \ [(u_n - 1) \times v_n] = 0$, pois (v_n) é limitada e $\lim(u_n - 1) = 0$.

4.

4.1. Sabemos que $A(a, 0, 0)$, com $a \in \mathbb{R}$.

Como A pertence ao plano ABE, então $4a = 16 \Leftrightarrow a = 4$.

Logo, $A(4, 0, 0)$.

Como $[OABC]$ é um retângulo e $A(4, 0, 0)$ e $C(0, 3, 0)$, então $B(4, 3, 0)$.

D pertence ao eixo Oz, $[DEFG]$ é um retângulo, DE é paralela a OA e $\overline{DG} = 1$, então $G(0,1,8)$.

Além disso, $F = E + \overrightarrow{DG}$.

Sabemos que $E(e, 0,8)$ e E pertence ao plano ABE:

$4e + 8 = 16 \Leftrightarrow 4e = 8 \Leftrightarrow e = 2$

Assim, $F = (2,0,8) + (0,1,0) = (2,1,8)$.

$O\hat{B}F = (\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BF}})$

$\overrightarrow{BO} = O - B = (-4, -3, 0)$ $\quad\quad$ $\|\overrightarrow{BO}\| = \sqrt{16 + 9} = 5$

$\overrightarrow{BF} = F - B = (-2, -2, 8)$ $\quad\quad$ $\|\overrightarrow{BF}\| = \sqrt{4 + 4 + 64} = \sqrt{72}$

$\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BF} = 8 + 6 = 14$

$$\cos(O\hat{B}F) = \frac{14}{5 \times \sqrt{72}} \Leftrightarrow O\hat{B}F = cos^{-1}\left(\frac{14}{5 \times \sqrt{72}}\right)$$

$$O\hat{B}F \approx 70{,}7°$$

4.2. ABE é o plano mediador do segmento de reta $[OP]$.

Comecemos por definir vetorialmente a reta OP, que sabemos ser perpendicular ao plano ABE:

$$(x, y, z) = (0,0,0) + k(4,0,1), k \in \mathbb{R}$$

Um ponto genérico da reta OP é $(4k, 0, k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Determinemos a interseção da reta OP com o plano ABE:

$4(4k) + k = 16 \Leftrightarrow 17k = 16 \Leftrightarrow k = \frac{16}{17}$

Seja $I\left(\frac{64}{17}, 0, \frac{16}{17}\right)$ o ponto de interseção da reta OP com o plano ABE.

$$P = I + \overrightarrow{OI} = \left(\frac{64}{17}, 0, \frac{16}{17}\right) + \left(\frac{64}{17}, 0, \frac{16}{17}\right) =$$

$$= \left(\frac{128}{17}, 0, \frac{32}{17}\right)$$

5. Opção (A)

A condição $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ define, no espaço, a superfície esférica de diâmetro $[AB]$.

<u>Caderno 2</u>

6. Opção (B)

Seja $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

$$1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Assim:

$$1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow \text{tg}^2\alpha = 9 - 1 \Leftrightarrow \text{tg}^2\alpha = 8 \Leftrightarrow \text{tg}\,\alpha = \pm\sqrt{8} \Leftrightarrow \text{tg}\,\alpha = \pm 2\sqrt{2}$$

Como $\alpha \in [0, \pi]$ e $\cos\alpha > 0$, então $\alpha \in 1.^\circ\,\text{Q}$, logo, $\text{tg}\,\alpha = 2\sqrt{2}$.

$$\text{tg}\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right) + 2\text{sen}\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \text{tg}\,\alpha + 2\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

7. $-3, x, y, \ldots$ são os três primeiros termos de uma progressão aritmética, logo $y - x = x + 3$.

$y, x, 1, \ldots$ são os três primeiros termos de uma progressão geométrica, logo $\frac{1}{x} = \frac{x}{y}$.

$$\begin{cases} y - x = x + 3 \\ \frac{1}{x} = \frac{x}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2x + 3 \\ \underline{\qquad\quad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ \underline{\qquad\quad} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times (-3)}}{2} \\ \underline{\qquad\quad} \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases} \vee \underbrace{\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}}_{\text{condição impossível,pois } x>0} \right. \Leftrightarrow x = 3 \;\wedge\; y = 9$$

$-3, \xrightarrow{+6} 3, \xrightarrow{+6} 9, \ldots$ são os três primeiros termos da progressão aritmética, logo 15 é o quarto termo da progressão aritmética.

$9, \xrightarrow{:3} 3, \xrightarrow{:3} 1, \ldots$ são os três primeiros termos da progressão geométrica, logo $\frac{1}{3}$ é o quarto termo da progressão geométrica.

8. Opção (A)

$\text{tg}x = \frac{\overline{DP}}{2} \Leftrightarrow \overline{DP} = 2\text{tg}x$

$\overline{CP} = 2 - 2\text{tg}x$

$A_{[AMP]} = A_{[ABCD]} - A_{[ADP]} - A_{[PCM]} - A_{[MBA]} =$

$= 2^2 - \frac{2\times 2\text{tg}x}{2} - \frac{(2-2\text{tg}x)\times 1}{2} - \frac{2\times 1}{2} =$

$= 4 - 2\text{tg}x - (1 - \text{tg}x) - 1 =$

$= 4 - 1 - 1 - 2\text{tg}x + \text{tg}x =$

$= 2 - \text{tg}x$

9.

9.1.

	L_n	C_n	P_n
$n = 1$ (F_1)	4	3	12
$n = 2$ (F_2)	20	1	20
$n = 3$ (F_3)	100	$\frac{1}{3}$	$\frac{100}{3}$

9.2. A sucessão (L_n) do número de lados é uma progressão geométrica de razão 5 e primeiro termo igual a 4, logo a expressão do termo geral é $L_n = 4 \times 5^{n-1}$.

A sucessão (C_n) do comprimento do lado da figura F_n é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$ e primeiro termo igual a 3, logo a expressão do termo geral é $C_n = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

A sucessão (P_n) do perímetro da figura F_n admite como termo geral a expressão:

$$P_n = 4 \times 5^{n-1} \times 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 12 \times \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} =$$

$$= 12 \times \left(\frac{5}{3}\right)^{n} \times \frac{3}{5} =$$

$$= \frac{36}{5} \times \left(\frac{5}{3}\right)^{n}$$

9.3. $\lim P_n = \lim \left(\frac{36}{5} \times \left(\frac{5}{3}\right)^n\right) = \frac{36}{5} \times \lim \left(\frac{5}{3}\right)^n = \frac{36}{5} \times (+\infty) = +\infty$

10. Seja $P(n): a_n < 2$.

10.1. (i) $P(1)$ é verdadeira

$a_1 < 2$, o que é verdade.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ é verdadeira

$P(n): a_n < 2$ (hipótese de indução)

$P(n+1): a_{n+1} < 2$ (tese de indução)

$a_{n+1} - 2 = \frac{3a_n+4}{a_n+3} - 2 = \frac{3a_n+4-2a_n-6}{a_n+3} = \frac{a_n-2}{a_n+3}$

Por hipótese de indução, $a_n < 2$, ou seja, $a_n - 2 < 0$, logo $\frac{a_n-2}{a_n+3} < 0$, pois $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Concluímos, assim, que $a_{n+1} - 2 < 0$, isto é, $a_{n+1} < 2$.

Por (i), (ii) e pelo princípio de indução matemática, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < 2$ é uma proposição verdadeira.

10.2. $a_{n+1} - a_n = \frac{3a_n+4}{a_n+3} - a_n = \frac{3a_n+4-(a_n)^2-3a_n}{a_n+3} = \frac{4-(a_n)^2}{a_n+3}$

Pela alínea anterior, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < 2$ e, pelas condições do enunciado, sabemos que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$.

Então:

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n < 2 \Rightarrow (a_n)^2 < 4$

$\Rightarrow 4 - (a_n)^2 > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n + 3 > 0$, logo, $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n > 0$, ou seja, (a_n) é crescente.