

Teste N.º 3

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: _____ N.º: ____ Turma: ____

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

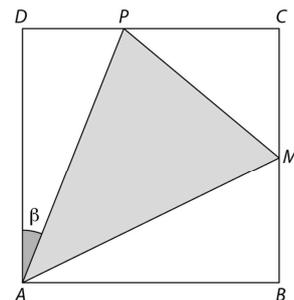
1. Qual das seguintes proposições é verdadeira?

- (A) $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow \text{sen } \alpha_1 > \text{sen } \alpha_2$
 (B) $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[, \alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow \text{cos } \alpha_1 < \text{cos } \alpha_2$
 (C) $\exists \alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[: \text{tg } \alpha = 2020$
 (D) $\exists \alpha \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[: \text{sen } \alpha = -\frac{1}{2020} \wedge \text{cos } \alpha = \frac{2019}{2020}$

2. Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$, de lado 2.

O ponto M é o ponto médio de $[BC]$.

O ponto P desloca-se sobre o lado $[CD]$ e, para cada posição do ponto P , considere β a amplitude do ângulo PAD ($\beta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$).



2.1. Mostre que a área do triângulo $[AMP]$ é dada, em função de β , por:

$$A(\beta) = 2 - \text{tg } \beta$$

2.2. Considere agora as funções reais de variável real f e g definidas por:

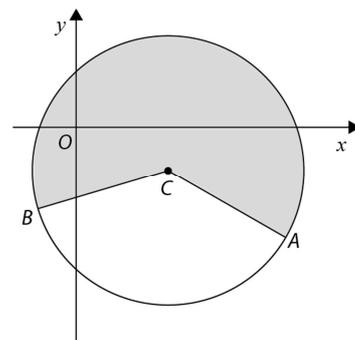
$$f(x) = 2 - \text{tg } x \quad \text{e} \quad g(x) = 2\text{sen } x \text{tg } x + 2$$

Determine, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, as abcissas dos pontos de interseção dos gráficos das funções f e g .

3. Na figura está representada, num referencial o.n. Oxy , a circunferência de centro C que pode ser definida por:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$$

Sabe-se que A e B são dois pontos da circunferência e que a área da região sombreada é $\frac{20\pi}{3}$.



3.1. Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$?

- (A) $-50\sqrt{3}$ (B) -5 (C) $5\sqrt{3}$ (D) 5

3.2. Considere também o ponto D , ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo das abcissas.

Determine a equação reduzida da reta t , reta tangente à circunferência no ponto D .

4. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma triangular reto.

Sabe-se que uma das bases do prisma está contida no plano α de equação $-x + \frac{5}{2}y + z - \frac{47}{2} = 0$ e que a outra base está contida no plano β que contém o ponto A de coordenadas $(1, 2, 3)$.

4.1. Em qual das opções se encontra uma condição que define o plano β ?

- (A) $2x - 5y - 2z + 14 = 0$
- (B) $5x - 2y + 2z - 7 = 0$
- (C) $-x + \frac{5}{2}y + z + 7 = 0$
- (D) $4x - 10y - 4z + 14 = 0$

4.2. Determine o valor exato da altura do prisma.

4.3. Considere os pontos B, C e D , dos quais se sabe que:

- o ponto B pertence ao plano α e tem abcissa e ordenada igual a 1;
- o ponto C pertence ao plano α e ao eixo das ordenadas;
- o ponto D pertence ao plano de equação $y = 1$ e tem cota igual ao cubo da abcissa;
- os vetores \overrightarrow{BC} e \overrightarrow{OD} são perpendiculares.

Determine a abcissa do ponto D , recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver a equação, devidamente identificado(s);
- apresente a abcissa do ponto D , arredondada às milésimas.

5. Para um determinado valor real a , considere a sucessão (u_n) definida por:

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = \frac{1 - u_n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Qual é o terceiro termo desta sucessão?

- (A) $\frac{1-a}{2}$
- (B) $\frac{1+a}{2}$
- (C) $\frac{1+a}{4}$
- (D) $\frac{1-a}{4}$

6. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \frac{2n+5}{n+1}$.

6.1. Estude a sucessão (u_n) quanto à monotonia.

6.2. Prove que a sucessão (u_n) é limitada.

6.3. Considere a progressão aritmética (v_n) , da qual se sabe que os dois primeiros termos são iguais aos dois primeiros termos da sucessão (u_n) .

Calcule a soma dos 20 primeiros termos de (v_n) .

7. De dois vetores \vec{u} e \vec{v} , sabe-se que:

- $\|\vec{u}\| = 3$
- $\|\vec{v}\| = 5$
- $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{14}}{15}$, onde α é o ângulo agudo formado pelos vetores \vec{u} e \vec{v} .

Qual é o valor de $\|\vec{u} + \vec{v}\|$?

(A) $\frac{1}{15}$

(B) 6

(C) 15

(D) 36

- FIM -

COTAÇÕES

| Item | | | | | | | | | | | | | |
|---------------------|------|------|------|------|------|------|------|----|------|------|------|----|------------|
| Cotação (em pontos) | | | | | | | | | | | | | |
| 1. | 2.1. | 2.2. | 3.1. | 3.2. | 4.1. | 4.2. | 4.3. | 5. | 6.1. | 6.2. | 6.3. | 7. | |
| 8 | 20 | 20 | 8 | 20 | 8 | 20 | 20 | 8 | 20 | 20 | 20 | 8 | 200 |