TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

Caderno 1

1. Opção (A)

Sabemos que $P(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ e que $\cos\alpha < 0$ e que $\operatorname{sen}\alpha < 0$.

$P_{[PQR]} = \overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RP} = 2|\operatorname{sen}\alpha| + \overline{QR} + \overline{QR}$ (pois $\overline{RP} = \overline{QR}$)

$= -2\operatorname{sen}\alpha + 2\overline{QR}$

Pretendemos determinar $\overline{QR}$. Seja Q' a projeção ortogonal de Q sobre o eixo Ox.

$$\overline{QR}^2 = \overline{QQ'}^2 + \overline{Q'R}^2 \Leftrightarrow \overline{QR}^2 = |\operatorname{sen}\alpha|^2 + (3 - |\cos\alpha|)^2 \Leftrightarrow \overline{QR}^2 = \operatorname{sen}^2\alpha + (3 + \cos\alpha)^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{QR}^2 = \operatorname{sen}^2\alpha + 9 + 6\cos\alpha + \cos^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \overline{QR}^2 = 1 + 9 + 6\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \overline{QR}^2 = 10 + 6\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \overline{QR} = \pm\sqrt{10 + 6\cos\alpha}$$

Como $\overline{QR} > 0$, então $\overline{QR} = \sqrt{10 + 6\cos\alpha}$.

Assim, o perímetro do triângulo $[PQR]$ é dado por $-2\operatorname{sen}\alpha + 2\sqrt{10 + 6\cos\alpha}$.

2.

2.1. $f(x) = \frac{\operatorname{sen}x}{1-\cos x} - \frac{1}{\operatorname{sen}x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x - 1 + \cos x}{\operatorname{sen}x(1-\cos x)} =$

$= \frac{1 - \cos^2 x - 1 + \cos x}{\operatorname{sen}x(1-\cos x)} =$

$= \frac{\cos x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}x(1-\cos x)} =$

$= \frac{\cos x(1-\cos x)}{\operatorname{sen}x(1-\cos x)} =$

$= \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x} =$

$= \frac{1}{\operatorname{tg}x}$

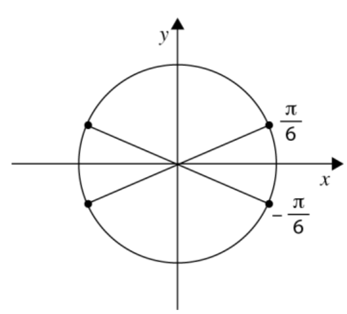
2.2. $f(x) = \operatorname{tg}x \Leftrightarrow \frac{1}{\operatorname{tg}x} = 3\operatorname{tg}x$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \ \vee \ = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



Em $]-\pi, 2\pi[\backslash\{0, \pi\}$ as soluções são:

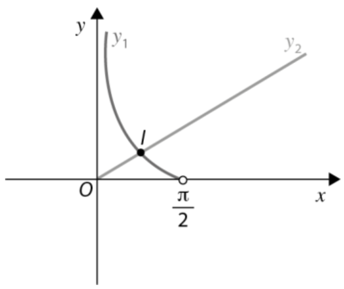
$x = -\frac{5\pi}{6}, x = -\frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}, x = \frac{7\pi}{6}$ e $x = \frac{11\pi}{6}$

2.3. Pretendemos determinar a solução da condição $f(x) = x \ \wedge \ 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$y_1 = f(x)$

$y_2 = x$



$I(a, b)$

$a \approx 0{,}86$

$b \approx 0{,}86$

A abcissa do ponto P é com a aproximação pedida igual a 0,86.

3. Opção (C)

Seja α a amplitude do ângulo AOB:

$$2\pi \,\underline{\hspace{2cm}}\, 6\pi$$

$$\alpha \,\underline{\hspace{2cm}}\, 4$$

$$\alpha = \frac{8\pi}{6\pi} \Leftrightarrow \alpha = \frac{4}{3}$$

Assim, a área do setor circular é dada por:

$$A = \frac{3^2 \times \frac{4}{3}}{2} = 6$$

A área da região a sombreado é igual a:

$$A_{[OACB]} - A_{\text{setor circular}} \overset{(1)}{=} 2 \times A_{[OCB]} - 6 =$$

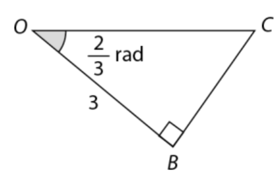
$$= 2 \times \frac{3 \times \overline{BC}}{2} - 6 =$$

$$= 3 \times 3\text{tg}\left(\frac{2}{3}\right) - 6 =$$

$$= 9\text{tg}\left(\frac{2}{3}\right) - 6$$

$$\approx 1{,}08$$

Cálculo auxiliar



$\text{tg}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\overline{BC}}{3} \Leftrightarrow \overline{BC} = 3 \times \text{tg}\left(\frac{2}{3}\right)$

(1) Os triângulos $[OCB]$ e $[OAC]$ são geometricamente iguais, pois são ambos triângulos retângulos com a mesma hipotenusa e com um dos catetos iguais.

4.

4.1. $\overrightarrow{AB}$ é perpendicular a $\overrightarrow{BC}$, pois $[ABC]$ é um triângulo retângulo em B (por se tratar de um triângulo inscrito numa semicircunferência de diâmetro $[AC]$).

$\overrightarrow{AB}$ é perpendicular a $\overrightarrow{CD}$, pois $[CD]$ é uma geratriz do cilindro de revolução e $[AB]$ é uma corda de uma base do cilindro. Assim, $\overrightarrow{AB}$ é um vetor normal ao plano BCD.

$\overrightarrow{AB} = \left(1+\sqrt{2}, 1, 1\right) - \left(1, \sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\right)$

Logo, o plano BCD pode ser definido por:

$\sqrt{2}\left(x-1-\sqrt{2}\right) + \left(1-\sqrt{2}\right)(y-1) + \left(1-\sqrt{2}\right)(z-1) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}x - \sqrt{2} - 2 + y - 1 - \sqrt{2}y + \sqrt{2} + z - 1 - \sqrt{2}z + \sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}x + \left(1-\sqrt{2}\right)y + \left(1-\sqrt{2}\right)z - 4 + \sqrt{2} = 0$

4.2. Comecemos por definir a reta perpendicular ao plano ABC que passa por B:

$$(x, y, z) = \left(1+\sqrt{2}, 1, 1\right) + k(0,1,-1), k \in \mathbb{R}$$

Assim, um ponto genérico da reta referida é:

$$\left(1+\sqrt{2}, 1+k, 1-k\right), \text{ com } k \in \mathbb{R}$$

Determinemos a interseção desta reta com o plano suporte da outra base do cilindro:

$(1+k) - (1-k) + 6 = 0 \Leftrightarrow 2k = -6 \Leftrightarrow k = -3$

$I\left(1+\sqrt{2}, -2, 4\right)$ é o ponto de interseção da reta com o plano suporte da outra base do cilindro.

Logo, a altura do cilindro é igual a $\overline{BI}$:

$\overline{BI} = \sqrt{\left(1+\sqrt{2}-1-\sqrt{2}\right)^2 + (-2-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

5. $u_n = \frac{n+6}{n+4} = \frac{n+4+2}{n+4} = 1 + \frac{2}{n+4}$

Por um lado: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

$$n + 4 \geq 5$$

$$\frac{1}{n+4} \leq \frac{1}{5}$$

$$\frac{2}{n+4} \leq \frac{2}{5}$$

$$1 + \frac{2}{n+4} \leq \frac{7}{5}$$

Por outro lado: $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2}{n+4} \geq 0$

$$1 + \frac{2}{n+4} \geq 1$$

Logo, $1 \leq u_n \leq \frac{7}{5}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, isto é, (u_n) é limitada.

Caderno 2

6. Opção (C)

Sejam m_r e m_s os declives, respetivamente, das retas r e s.

$$m_r = \frac{a-2}{-a}$$

$$s: ay + a^2x - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{a^2}{a}x + \frac{1}{a} \Leftrightarrow y = -ax + \frac{1}{a}$$

$$m_s = -a$$

As retas r e s são perpendiculares se e só se:

$$m_r \times m_s = -1 \Leftrightarrow \frac{a-2}{-a} \times (-a) = -1$$

$$\Leftrightarrow a - 2 = -1$$

$$\Leftrightarrow a = 1$$

7. Sejam u_1, u_2 e u_3 os três primeiros termos da progressão geométrica referida.

Então:

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2}$$

Como $u_1 = 2$, vem que $\frac{u_2}{2} = \frac{u_3}{u_2}$ e, consequentemente, $(u_2)^2 = 2u_3$.

Sabemos também que u_2 e u_3 são o terceiro e o décimo terceiro termos, respetivamente, de uma progressão aritmética. Seja r a razão dessa progressão aritmética.

Tem-se que:

$u_2 = 2 + 2r$ (terceiro termo da progressão aritmética)

$u_3 = 2 + 12r$ (décimo terceiro termo da progressão aritmética)

Então, como:

$$(u_2)^2 = 2u_3$$

vem que:

$$(2+2r)^2 = 2(2+12r) \Leftrightarrow 4 + 8r + 4r^2 = 4 + 24r$$

$$\Leftrightarrow 4r^2 - 16r = 0$$

$$\Leftrightarrow 4r(r-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \ \vee \ r = 4$$

Logo, $u_2 = 2 + 2 \times 4 = 10$.

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{10}{2} = 5$$

Concluímos que $u_n = 2 \times 5^{n-1}$ é o termo geral da progressão geométrica e $v_n = 2 + 4(n-1)$ é o termo geral da progressão aritmética.

8. Opção (D)

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: -1 \leq -x + 1 \leq 1\} = [0, 2]$

$-1 \leq -x + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq -x \leq 0$

$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$

$\forall x \in [0, 2], 0 \leq \arccos(-x + 1) \leq \pi$

$\forall x \in [0, 2], \pi \leq f(x) \leq 2\pi$

Assim, $D'_f = [\pi, 2\pi]$.

9. $P(n): b_n < 4$

9.1. (i) $P(1)$ é verdadeira

$b_1 < 4 \Leftrightarrow 3 < 4$, o que é verdade.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ é verdadeira

$P(n): b_n < 4$ (hipótese de indução)

$P(n+1): b_{n+1} < 4$ (tese de indução)

$b_n < 4 \Leftrightarrow 4 + b_n < 8 \Leftrightarrow \frac{4+b_n}{2} < 4 \Leftrightarrow b_{n+1} < 4$

Por (i) e (ii), pelo princípio de indução matemática, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}, b_n < 4$ é uma proposição verdadeira.

9.2. $b_{n+1} - b_n = \frac{4+b_n}{2} - b_n = 2 - \frac{b_n}{2}$

Pela alínea anterior, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}, b_n < 4$, logo:

$\forall n \in \mathbb{N}, -b_n > -4$

$\Leftrightarrow \frac{-b_n}{2} > -2$

$\Leftrightarrow 2 - \frac{b_n}{2} > 0$

Como $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - b_n > 0$, concluímos que (b_n) é crescente.

10. Opção (C)

$$c_n = \frac{n^2+n+1}{1+2+\cdots+n} = \frac{n^2+n+1}{\frac{1+n}{2}\times n} = \frac{n^2+n+1}{\frac{n^2+n}{2}} = \frac{2n^2+2n+2}{n^2+n}$$

$$\lim c_n = \lim \frac{2n^2+2n+2}{n^2+n} = \lim \frac{n^2\left(2+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{2+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{2}{1} = 2$$