TESTE DE AVALIAÇÃO GLOBAL – MATEMÁTICA A

11.º ANO

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

1. A circunferência tem raio $\sqrt{3}$.

Tomando $[MN]$ para base do triângulo, tem-se:

altura = $\left|\sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6}\right| = \left|\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \frac{3}{2}$

base = $2\times\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{6} = 2\sqrt{3}\times\frac{1}{2} = \sqrt{3}$

A área do triângulo é igual a $\dfrac{\sqrt{3}\times\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

Opção correta: (B)

2.

(A) $\overrightarrow{OE}\cdot\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}\right) = \overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{AD} \underset{\overrightarrow{OE}\perp\overrightarrow{AD}}{=} 0$ (proposição verdadeira)

(B) $\overrightarrow{AE}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}\right) \underset{\overrightarrow{AE}\perp\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}\right)}{=} 0$ (proposição verdadeira)

(C) $\overrightarrow{AO}\cdot\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EO}\right) = \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AO} = \left\|\overrightarrow{AO}\right\|^2 = 5^2 = 25$ (proposição verdadeira)

(D) $\overrightarrow{OE}\cdot\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AO}\right) = \overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{EO} = -\left\|\overrightarrow{OE}\right\|^2 = -25$ ($\overrightarrow{OE}\cdot\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AO}\right) = 25$ é uma proposição falsa)

Opção correta: (D)

3. $\lim u_n = \lim\left(2+\frac{1}{n}\right) = 2$; por definição de limite de uma sucessão, tem-se:

$\forall\delta\in\mathbb{R}^+, \exists p\in\mathbb{N}:\ n\geq p \Rightarrow |u_n - 2| < \delta$

Opção correta: (B)

4.

(A) $\lim\limits_{x \to 2} (f \circ g)(x)$ não existe, pois $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = g(2) = 3$ e 3 não é ponto aderente a $D_f =]-\infty, -4] \cup [4, +\infty[$.

(B) $\lim\limits_{x \to 4} (f \circ g)(x)$ não existe, pois $\lim\limits_{x \to 4} g(x) = g(4) = 1$ e 1 não é ponto aderente a D_f.

(C) $\lim\limits_{x \to -4} (g \circ f)(x)$ existe, pois $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = f(-4) = 0 \in D_g$ e $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = g(0) = 2$.

(D) $\lim\limits_{x \to -2} (g \circ f)(x)$ não existe, pois -2 não é ponto aderente a D_f.

Opção correta: (C)

5. Tendo o gráfico de h uma assíntota vertical bilateral de equação $x = -1$, os limites laterais de h em $x = -1$ são infinitos.

Como $h'(x) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1} < 0 \Leftrightarrow x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$, a função h é decrescente para $x < -1$.

E como $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -1$, a função h é crescente para $x > -1$.

Assim, tem-se $\lim\limits_{x \to -1^-} h(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to -1^+} h(x) = -\infty$, pelo que $\lim\limits_{x \to -1} h(x) = -\infty$.

Opção correta: (A)

6.1 $\overline{OB} = \overline{OC} = 1$ e $B\hat{O}C = \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha \underset{\alpha = \frac{\pi}{6}}{=} \dfrac{\pi}{6}$

$$\overline{BC}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 - 2 \times \overline{OB} \times \overline{OC} \times \cos\left(B\hat{O}C\right) = 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

6.2 As coordenadas do ponto B são, em função de α, $(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

As coordenadas do ponto C são, em função de α, $\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right), \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)$, ou seja, $(\sin\alpha, \cos\alpha)$.

$$d(\alpha)=d(B,C)=\sqrt{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=\sqrt{2(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}=$$

$$=\sqrt{2\left(\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha\right)}=\sqrt{2(1-2\sin\alpha\cos\alpha)}=\sqrt{2-4\sin\alpha\cos\alpha}$$

6.3 $d(\alpha)=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2-4\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{2}\Rightarrow 2-4\sin\alpha\cos\alpha=2\Leftrightarrow\sin\alpha\cos\alpha=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha=0\vee\underbrace{\cos\alpha=0}_{\substack{\text{impossível}\\ \text{em }\left[0,\frac{\pi}{4}\right[}}\underset{\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right[}{\Leftrightarrow}\alpha=0$$

Verificação: $d(0)=\sqrt{2-4\times0\times1}=\sqrt{2}$

Para $\alpha=0$, o triângulo é retângulo em O, medindo a sua hipotenusa $\sqrt{2}$.

7.1 As coordenadas do ponto de interseção do plano CDV com o eixo Oz são da forma $(0,\,0,\,z)$, com $z\in\mathbb{R}$.

Assim, tem-se: $6\times0-8\times0+25z=84\Leftrightarrow z=\dfrac{84}{25}$.

As coordenadas do ponto de interseção são $\left(0,\,0,\,\dfrac{84}{25}\right)$.

7.2. $B=C+\overrightarrow{CB}=C+\overrightarrow{DA}$

$\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{AD}$ tem coordenadas $(0,1,-4)$

B tem coordenadas $(-4+0,-1+1,4+(-4))=(-4,0,0)$

Alternativamente:

$B=A+\overrightarrow{DC}$

$D=A+\overrightarrow{AD}$ tem coordenadas $(0+0,3+(-1),0+4)=(0,2,4)$

$\overrightarrow{DC}=C-D$ tem coordenadas $(-4-0,-1-2,4-4)=(-4,-3,0)$

B tem coordenadas $(0+(-4),3+(-3),0+0)=(-4,0,0)$.

7.3 $\overrightarrow{AD}(0,-1,4)$

$D = A + \overrightarrow{AD}$ tem coordenadas $(0+0,3+(-1),0+4)=(0,2,4)$.

$\overrightarrow{CD} = D - C$ tem coordenadas $(0-(-4),2-(-1),4-4)=(4,3,0)$.

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}=-3$; $\quad \|\overrightarrow{AD}\|=\sqrt{0^2+(-1)^2+4^2}=\sqrt{17}$; $\quad \|\overrightarrow{CD}\|=\sqrt{4^2+3^2+0^2}=5$.

A amplitude do ângulo das retas AD e CD é $\arccos\left(\frac{|-3|}{\sqrt{17}\times 5}\right)\approx 81,6^{\circ}$.

7.4 Seja $\vec{n}(a,b,c)$ um vetor normal ao plano ADV.

Tem-se: $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0 \wedge \vec{n}\cdot\overrightarrow{AV}=0$.

$\overrightarrow{AD}(0,-1,4)$ e $\overrightarrow{AV}(3-0,-2-3,2-0)=\overrightarrow{AV}(3,-5,2)$.

$$\begin{cases}(a,b,c)\cdot(0,-1,4)=0\\(a,b,c)\cdot(3,-5,2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-b+4c=0\\3a-5b+2c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=4c\\3a-20c+2c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=4c\\a=6c\end{cases}$$

Obtém-se, então, $\vec{n}(6c,\ 4c,\ c)\ (c\in\mathbb{R})$; assim, para $c=1$, por exemplo, temos $\vec{n}(6,\ 4,\ 1)$.

Uma equação cartesiana do plano é da forma $6x+4y+z=d$, com $d\in\mathbb{R}$.

Considerando-se o ponto $A(0,3,0)$ e o vetor $\vec{n}(6,\ 4,\ 1)$, obtém-se:

$6\times 0+4\times 3+0=d \Leftrightarrow d=12$

Concluindo, $6x+4y+z=12$ é uma equação cartesiana do plano.

8.1 $u_{n+1}-u_n=\frac{2^{n+1}-6^{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{2^n-6^n}{3^n}=\frac{2^{n+1}-6^{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{3\times 2^n-3\times 6^n}{3^{n+1}}=$

$=\frac{2\times 2^n-6\times 6^n-(3\times 2^n-3\times 6^n)}{3^{n+1}}=\frac{-2^n-3\times 6^n}{3^{n+1}}<0\ \ (\forall n\in\mathbb{N})$

(u_n) é uma sucessão decrescente.

8.2 $\lim u_n = \lim \frac{2^n - 6^n}{3^n} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\left(\frac{2^n}{3^n} - \frac{6^n}{3^n}\right) = \lim\left(\frac{2}{3}\right)^n - \lim 2^n = 0 - (+\infty) = -\infty$

8.3 $w_n = u_n + 2^n = \frac{2^n - 6^n}{3^n} + 2^n = \frac{2^n}{3^n} - \frac{6^n}{3^n} + 2^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2^n + 2^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2}{3}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{2}{3}$; logo, (w_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$.

> Alternativamente:
>
> $w_n = u_n + 2^n = \frac{2^n - 6^n}{3^n} + 2^n = \frac{2^n - 6^n}{3^n} + \frac{2^n \times 3^n}{3^n} = \frac{2^n - 6^n + 6^n}{3^n} = \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
>
> (w_n) é uma progressão geométrica, pois é definida por uma expressão da forma a^n, com a real, sendo a sua razão $\frac{2}{3}$.

9. A função f é contínua em $x = 1$ se e só se $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$.

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = 1 - k$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt{x^2 - 1}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 1^+} \sqrt{\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}} = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)}} = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{\frac{x+3}{x+1}} = \sqrt{2}$

Tem-se, portanto, $1 - k = \sqrt{2} \Leftrightarrow k = 1 - \sqrt{2}$.

10. $D_g = \mathbb{R}$

$$g'(x) = \left(x^4 - 6x^2 + 2\right)' = 4x^3 - 12x$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x = 0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2 - 3\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 3 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$4x$	–	–	–	0	+	+	+
$x^2 - 3$	+	0	–	–	–	0	+
$g'(x)$	–	0	+	0	–	0	+
Monotonia e extremos de g	$\searrow$	Mín. -7	$\nearrow$	Máx. 2	$\searrow$	Mín. -7	$\nearrow$

g é crescente em $\left[-\sqrt{3}, 0\right]$ e em $\left[\sqrt{3}, +\infty\right[$.

g é decrescente em $\left]-\infty, \sqrt{3}\right]$ e em $\left[0, \sqrt{3}\right]$.

g tem máximo relativo 2, em $x = 0$.

g tem mínimo relativo e absoluto -7, em $x = -\sqrt{3}$ e em $x = \sqrt{3}$.

11. $f'(x) = \left(\sqrt{2x^2 + 2}\right)' = \dfrac{\left(2x^2 + 2\right)'}{2\sqrt{2x^2 + 2}} = \dfrac{4x}{2\sqrt{2x^2 + 2}} = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2 + 2}}$

Os declives das retas a e b são:

$$m_a = f'(-1) = \frac{2 \times (-1)}{\sqrt{2 \times (-1)^2 + 2}} = -1$$

$$m_b = f'(1) = \frac{2 \times 1}{\sqrt{2 \times 1^2 + 2}} = 1$$

Como $m_a \times m_b = -1$, as retas a e b são perpendiculares.

12. Para $n=1$, obtemos uma proposição verdadeira: $1=1^2$.

Para averiguar a hereditariedade da propriedade, consideramos que a propriedade é válida para n, isto é, que se tem $\forall n\in\mathbb{N},\ 1+3+5+...+(2n-1)=n^2$ (hipótese de indução), e vamos provar, usando a hipótese de indução, que a propriedade é válida para $n+1$, ou seja, que se verifica: $\forall n\in\mathbb{N},\ 1+3+5+...+(2n-1)+(2n+1)=(n+1)^2$.

Com efeito, temos: $\quad 1+3+5+...+(2n-1)+(2n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$

Como a propriedade é válida para $n=1$ e é hereditária, pode-se afirmar que:

$\forall n\in\mathbb{N},\ 1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

13. Admitindo que o gráfico de g tem uma assíntota oblíqua em $+\infty$, o seu declive é dado por:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x-1)}{x}\underset{\substack{x-1=y\\x=y+1\\x\to+\infty\\y\to+\infty}}{=}\lim_{y\to+\infty}\frac{h(y)}{y+1}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{h(y)}{y}\times\frac{y}{y+1}\right)=2\times1=2$$

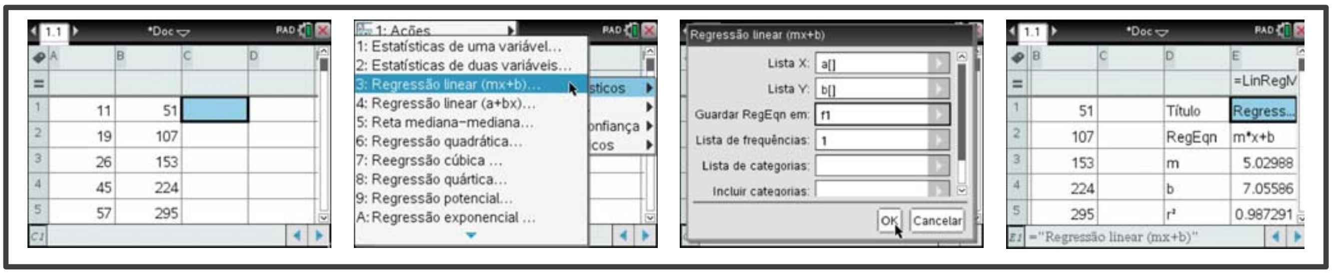
e a sua ordenada na origem é dada por:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(h(x-1)-2x\right)\underset{\substack{x-1=y\\x=y+1\\x\to+\infty\\y\to+\infty}}{=}\lim_{y\to+\infty}\left(h(y)-2(y+1)\right)=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(h(y)-2y-1\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(h(y)-2y\right)-1=-3-1=-4$$

A equação reduzida da assíntota oblíqua ao gráfico de g, em $+\infty$, é $y=2x-4$.

14. Introduzindo os dados numa calculadora, obtém-se:



- equação reduzida da reta de mínimos quadrados: $\quad y=5{,}030x+7{,}056$
- estimativa para o volume de uma amostra desta substância com 35 gramas de massa:
  $y=5{,}030\times35+7{,}056\approx183\left(\text{cm}^3\right)$

FIM