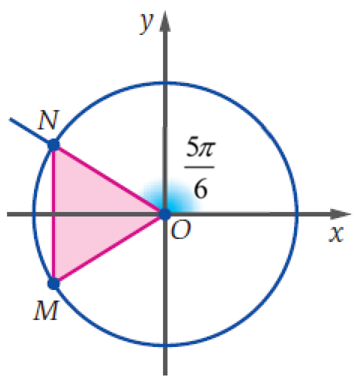
TESTE DE AVALIAÇÃO GLOBAL - MATEMÁTICA A
11.º ANO

DURAÇÃO DO TESTE: 90 MINUTOS

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreve, na tua folha de respostas, apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que selecionares para responder a esse item.
- Não apresentes cálculos, nem justificações.
- Se apresentares mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Na figura ao lado, está representada, em referencial ortonormado do plano, a circunferência de equação $x^2+y^2=3$. O ponto N pertence à circunferência e ao 2.° quadrante. A semirreta $\dot{O}N$ faz com o semieixo positivo das abcissas um ângulo de amplitude $\frac{5\pi}{6}$.

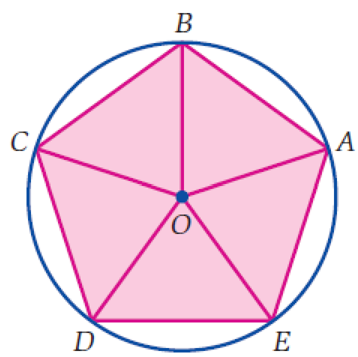


Os pontos M e N são simétricos em relação a Ox.

A área do triângulo $[MNO]$ é:

(A) $\frac{3}{4}$ **(B)** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ **(C)** $\frac{9}{4}$ **(D)** $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

2. Na figura ao lado, está representado o pentágono regular $[ABCDE]$, inscrito numa circunferência de centro no ponto O e raio 5.



Qual das seguintes proposições é **falsa**?

(A) $\overrightarrow{OE}\cdot\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}\right)=0$

(B) $\overrightarrow{AE}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}\right)=0$

(C) $\overrightarrow{AO}\cdot\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EO}\right)=25$

(D) $\overrightarrow{OE}\cdot\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AO}\right)=25$

3. Considera a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = 2 + \frac{1}{n}$.

Qual das seguintes proposições é verdadeira?

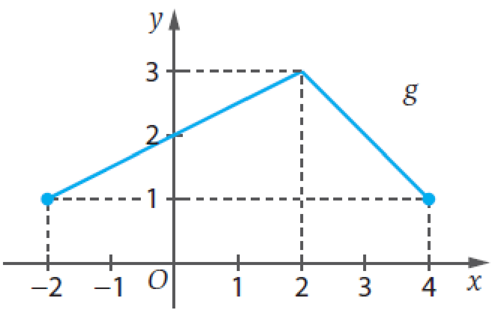
(A) $\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}: n \geq p \Rightarrow |u_n - 2| > \delta$

(B) $\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}: n \geq p \Rightarrow |u_n - 2| < \delta$

(C) $\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}: n \geq p \Rightarrow |u_n| > \delta$

(D) $\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}: n \geq p \Rightarrow |u_n| < \delta$

4. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$ e seja g a função cujo gráfico se representa na figura seguinte.



Qual dos seguintes limites existe?

(A) $\lim\limits_{x \to 2} (f \circ g)(x)$

(B) $\lim\limits_{x \to 4} (f \circ g)(x)$

(C) $\lim\limits_{x \to -4} (g \circ f)(x)$

(D) $\lim\limits_{x \to -2} (g \circ f)(x)$

5. Seja h uma função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, cuja derivada é definida por $h'(x) = \frac{1}{x+1}$.

Sabe-se que o gráfico de h tem uma assíntota vertical bilateral de equação $x = -1$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $\lim\limits_{x \to -1} h(x) = -\infty$

(B) $\lim\limits_{x \to -1} h(x) = 0$

(C) $\lim\limits_{x \to -1} h(x) = +\infty$

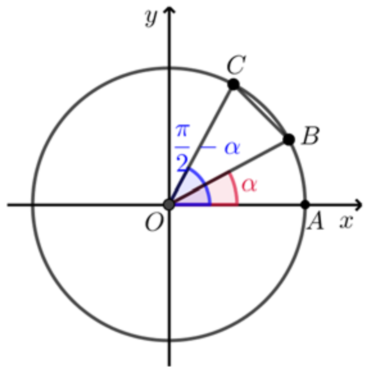
(D) Não existe $\lim\limits_{x \to -1} h(x)$.

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: Quando, para um resultado, não é pedida uma aproximação, apresenta sempre o **valor exato**.

6. Na figura ao lado, está representada, em referencial o.n. do plano de origem O, a circunferência trigonométrica.



Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1,0)$;
- os pontos B e C pertencem à circunferência;
- $A\hat{O}B = \alpha$ e $A\hat{O}C = \frac{\pi}{2} - \alpha$, com $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$.

6.1 Seja $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Mostra, recorrendo ao teorema de Carnot, que $\overline{BC} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$.

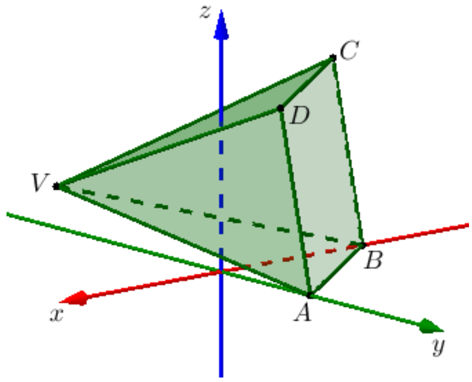
6.2 Mostra que, para cada valor de α, a distância $d(\alpha)$, entre os pontos B e C, pode ser dada por:

$$d(\alpha) = \sqrt{2 - 4\sin\alpha\cos\alpha}.$$

6.3 Determina, analiticamente, para que valor de α se tem $d(\alpha) = \sqrt{2}$.

Interpreta o valor obtido no contexto geométrico da situação.

7. Na figura ao lado, está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide $[ABCDV]$, de base $[ABCD]$.



Sabe-se que:

- $A(0,3,0)$, $C(-4,-1,4)$, $V(3,-2,2)$ e $\overrightarrow{AD}(0,-1,4)$;
- $[ABCD]$ é um paralelogramo;
- $6x-8y+25z=84$ é uma equação do plano CDV.

7.1 Determina as coordenadas do ponto de interseção do plano CDV com o eixo Oz.

7.2 Determina as coordenadas do vértice B.

7.3 Determina a amplitude do ângulo formado pelas retas AD e CD.

Apresenta o resultado arredondado às décimas de grau.

7.4 Determina uma equação do plano ADV.

Apresenta a equação na forma $ax+by+cz=d$.

8. Considera a sucessão (u_n) definida por $u_n=\dfrac{2^n-6^n}{3^n}$.

8.1 Estuda a sucessão (u_n) quanto à monotonia.

8.2 Determina $\lim u_n$.

8.3 Seja (w_n) a sucessão definida por $w_n=u_n+2^n$.

Mostra que (w_n) é uma progressão geométrica e indica a respetiva razão.

9. Seja f a função definida, para cada valor de k real, por:

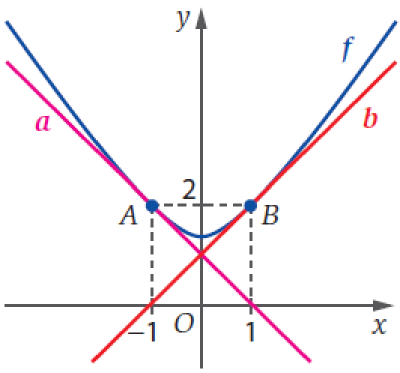
$$f(x)=\begin{cases} x-k & \text{se } x\leq 1 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt{x^2-1}} & \text{se } x>1 \end{cases}$$

Determina o valor de k para o qual a respetiva função f é contínua em $x=1$.

10. Seja g a função real de variável real definida por $g(x)=x^4-6x^2+2$.

Determina os intervalos de monotonia da função g e identifica os respetivos extremos relativos e absolutos, caso existam.

11. Na figura, está representada graficamente, em referencial ortonormado Oxy, a função f definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x)=\sqrt{2x^2+2}$.



As retas a e b são tangentes ao gráfico de f nos pontos A e B, de abcissas -1 e 1, respetivamente.

Mostra que as retas a e b são perpendiculares.

Atenção: Os itens 12, 13 e 14 são de opção. Deves optar por resolver apenas um deles. Identifica-o claramente na tua folha de resposta.

---

12. Prova, pelo princípio de indução matemática, que:

$$\forall n\in\mathbb{N},\ 1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

13. Sejam g e h funções, de domínio $\mathbb{R}$, tais que:

- $g(x)=h(x-1)$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}=2$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}(h(x)-2x)=-3$.

Verifica que o gráfico de g tem uma assíntota oblíqua em $+\infty$ e indica a respetiva equação reduzida.

14. Numa experiência para determinar a densidade de uma substância, em g/cm^3, fizeram-se medições da massa, em gramas, e do volume, em cm^3, de amostras dessa substância. Na tabela seguinte apresentam-se os resultados dessas medições.

Massa (g)	11	19	26	45	57
Volume (cm^3)	51	107	153	224	295

Obtém uma estimativa para o volume, em cm^3, arredondado às unidades, de uma amostra desta substância com 35 gramas de massa.

Na tua resolução, começa por determinar, recorrendo à calculadora, a equação reduzida da reta de mínimos quadrados relativa a este conjunto de dados. Considera coeficientes da equação arredondados com, pelo menos, três casas decimais.

FIM

Cotações

Item	**1. a 5.**	**6.1**	**6.2**	**6.3**	**7.1**	**7.2**	**7.3**	**7.4**	**Total: 200**
Cotação	5×8	10	14	8	8	8	14	14	
Item	**8.1**	**8.2**	**8.3**	**9.**	**10.**	**11.**	**12. / 13. / 14.**		

Cotação	10	10	8	14	18	12	12	