# Proposta de teste de avaliação

**Matemática A**

**11.º ANO DE ESCOLARIDADE**

---

**Duração:** 90 minutos **| Data:**

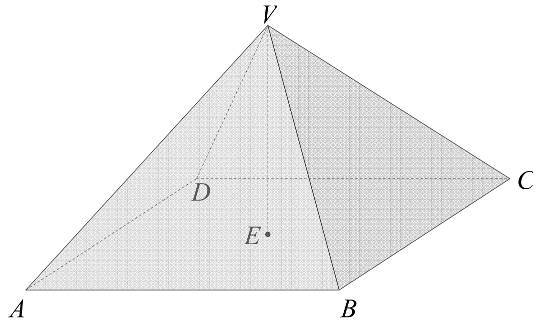
---

# Caderno 1

(é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

**1.** Considere, fixado um referencial cartesiano do espaço, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$.




Sabe-se que:

- os vértices $A$ e $B$ têm coordenadas $(4,1,0)$ e $(2,5,0)$, respetivamente;
- o vértice $D$ pertence ao eixo $Oy$;
- o ponto $E$ é o centro da base da pirâmide;
- o plano $ABV$ é definido pela equação

$$4x+2y+5z-18=0;$$

**1.1.** Determine as coordenadas do ponto $D$.

**1.2.** Mostre que o ponto $E$ tem coordenadas $(1,2,0)$.

**1.3.** Qual das seguintes condições define a reta $EV$ ?

**(A)** $x=1 \wedge y=2 \wedge z=0$

**(B)** $x=1 \wedge z=0$

**(C)** $x=1 \wedge y=2$

**(D)** $y=2 \wedge z=0$

**1.4.** Determine as coordenadas do ponto $V$.

**1.5.** Determine um valor aproximado à décima do grau da amplitude do ângulo $OBA$, sendo $O$ a origem do referencial.

**2.** De uma sucessão $(u_n)$ em que todos os termos são negativos, sabe-se $u_n - u_{n+1} < 0$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

**(A)** A sucessão $(u_n)$ é uma progressão aritmética.

**(B)** A sucessão $(u_n)$ tende para $-\infty$.

**(C)** $(u_n)$ é convergente.

**(D)** $(u_n)$ é monótona decrescente.

**3.** Três termos consecutivos de uma progressão aritmética $(a_n)$ são dados, para um determinado valor de $x$, por $2x-10$, $x^2$ e $10x-8$.

**3.1.** Determine esses três termos.

**3.2.** Sabe-se que o décimo primeiro termo de $(a_n)$ é igual a 100.

Determine o primeiro termo de $(a_n)$.

**Fim do Caderno 1**

**COTAÇÕES (Caderno 1)**

| Item | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cotação (em pontos) | | | | | | | | |
| **1.1.** | **1.2.** | **1.3.** | **1.4.** | **1.5.** | **2.** | **3.1.** | **3.2.** | |
| 10 | 10 | 10 | 15 | 15 | 10 | 15 | 15 | **100** |

# Caderno 2

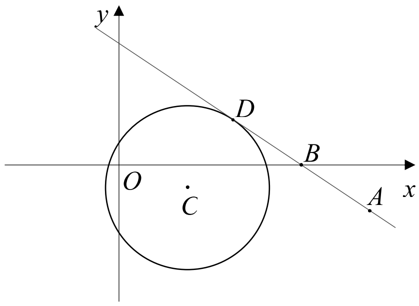
(não é permitido o uso de calculadora)

---

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

---

**4.** Na figura está representada, num plano munido de um referencial ortonormado, a circunferência de centro $C$ definida pela equação $(x-3)^2+(y+1)^2=13$.




Os pontos $A$, $B$ e $D$, igualmente representados na figura, têm coordenadas $(11\,,-2)$, $(8\,,0)$ e $(5\,,2)$, respetivamente.

**4.1.** Mostre que o ponto $D$ pertence à circunferência.

**4.2.** Mostre qua a reta $AB$ é tangente à circunferência no ponto $D$.

**4.3.** Seja $\alpha$ a inclinação, em radianos, da reta $AB$.

Determine o valor exato de $\dfrac{\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}+\alpha\right)\times\sin(\pi+\alpha)}{\tan(\pi-\alpha)}$.

**5.** Considere a função $f$ de domínio $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right]$ definida por $f(x)=\sin x$.

O contradomínio da função $f$ é:

**(A)** $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$

**(B)** $[-1\,,1]$

**(C)** $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$

**(D)** $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$

**6.** Considere a sucessão $(u_n)$ tal que $u_1 = 4 \wedge 2u_{n+1} = u_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

**6.1.** Justifique que $(u_n)$ é uma progressão geométrica e determine uma expressão do termo geral.

**6.2.** Mostre que, quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{N}$, $u_n \times u_m = 8\,u_{n+m}$.

**6.3.** Seja $S_n$ a soma dos primeiros $n$ termos de $(u_n)$.

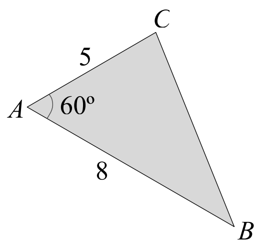
O valor de $\lim S_n$ é igual a:

**(A)** 2 **(B)** 4 **(C)** 8 **(D)** $+\infty$

**7.** Na figura está representado um triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 8$
- $\overline{AC} = 5$
- $B\hat{A}C = 60^\text{o}$




Qual é o valor de $\overline{BC}$?

**(A)** $\sqrt{89}$ **(B)** $\sqrt{39}$ **(C)** $4,4$ **(D)** 7

**Fim da prova**

## FORMULÁRIO

### Progressões

Soma dos $n$ primeiros termos de uma progressão $(u_n)$:

**Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

## COTAÇÕES (Caderno 2)

| Item | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cotação (em pontos) | | | | | | | | |
| **4.1.** | **4.2.** | **4.3.** | **5.** | **6.1.** | **6.2.** | **6.3.** | **7.** | |
| 15 | 15 | 15 | 10 | 10 | 15 | 10 | 10 | **100** |
| TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2) | | | | | | | | **200** |

# PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

## Caderno 1

**1.** **1.1** $A(4,1,0)$, $B(2,5,0)$,

$D(0,y,0)$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,5,0) - (4,1,0) = (-2, 4, 0)$

$\overrightarrow{AD} = D - A = (0,y,0) - (4,1,0) = (-4, y-1, 0)$

Como $[ABCE]$ é um quadrado, vem $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ pelo que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow (-2, 4, 0) \cdot (-4, y-1, 0) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 \times (-4) + 4(y-1) = 0 \Leftrightarrow 8 + 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow 4y = -4 \Leftrightarrow y = -1$

$D(0,-1,0)$

**1.2.** $D(0,-1,0)$ e $B(2,5,0)$;

$E$ é o ponto médio de $[DB]$:

$E\left(\frac{0+2}{2}, \frac{-1+5}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$, ou seja, $E(1, 2, 0)$

**1.3.** Os pontos $A$, $B$ e $D$ têm cota nula. Logo, a base da pirâmide está contida no plano de equação $z = 0$, isto é, no plano $xOy$.

A reta $EV$ é perpendicular ao plano $xOy$ pelo que é paralela ao eixo $Oz$. Como esta reta passa no ponto $E(1,2,0)$, pode ser definida pela condição $x = 1 \wedge y = 2$

**Resposta: (C)**

**1.4.** O ponto $V$ é a interseção da reta $EV$, definida pela condição $x = 1 \wedge y = 2$, com o plano $ABV$.

Substituindo $x$ por 1 e $y$ por 2 na equação $4x + 2y + 5z - 18 = 0$ que define o plano $ABV$, obtemos:

$4 \times 1 + 2 \times 2 + 5 \times z - 18 = 0 \Leftrightarrow 4 + 4 + 5z - 18 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5z = 10 \Leftrightarrow z = 2$

Assim, o ponto $V$ tem coordenadas $(1, 2, 2)$.

**1.5.** $\overrightarrow{BO} = O - B = (0,0,0) - (2,5,0) = (-2,-5,0)$

$\overrightarrow{BA} = A - B = (4,1,0) - (2,5,0) = (2,-4,0)$

$$\cos\left(O\hat{B}A\right) = \cos\left(\overrightarrow{BO}\,\hat{,}\,\overrightarrow{BA}\right) = \frac{\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BA}}{\left\|\overrightarrow{BO}\right\|\times\left\|\overrightarrow{BA}\right\|} =$$

$$= \frac{(-2,-5,0)\cdot(2,-4,0)}{\left\|(-2,-5,0)\right\|\times\left\|(2,-4,0)\right\|} = \frac{-4+20}{\sqrt{4+25+0}\times\sqrt{4+16}} =$$

$$= \frac{16}{\sqrt{29}\times\sqrt{20}} = \frac{16}{\sqrt{580}}$$

Se $\cos\left(O\hat{B}A\right) = \frac{16}{\sqrt{580}}$ então $O\hat{B}A \approx 48,4^{\text{o}}$.

**2.** Se $(u_n)$ é uma sucessão de termos negativos, então $u_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$u_n - u_{n+1} < 0$, $\forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Logo, $(u_n)$ é estritamente crescente.

Se $(u_n)$ é crescente e majorada então $(u_n)$ é convergente.

**Resposta: (C)**

**3.**

**3.1.** Se $2x-10$, $x^2$ e $10x-8$ são três termos consecutivos de uma progressão aritmética então $(10x-8)-x^2 = x^2-(2x-10)$.

$$(10x-8)-x^2 = x^2-(2x-10) \Leftrightarrow 10x-8-x^2 = x^2-2x+10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+x^2-2x-10x+10+8=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-12x+18=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+9=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2=0 \Leftrightarrow x=3$$

Para $x=3$, $2x-10 = 2\times3-10 = -4$

$x^2 = 3^2 = 9$

$10x-8 = 10\times3-8 = 22$

Os termos pedidos são $-4$, $9$ e $22$.

**3.2.** $a_{11} = 100$ .

$r = 9 - (-4) = 22 - 9 = 13$

$a_n = a_1 + (n-1) \times r$

$a_{11} = a_1 + (11-1) \times 13$

$100 = a_1 + 10 \times 13 \Leftrightarrow a_1 = 100 - 130 \Leftrightarrow a_1 = -30$

## Caderno 2

**4.** **4.1.** $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 13$

$D(5, 2)$

$(5-3)^2 + (2+1)^2 = 13 \Leftrightarrow 2^2 + 3^2 = 13 \Leftrightarrow 4 + 9 = 13$ (verdadeiro)

O ponto $D(5, 2)$ pertence à circunferência.

**4.2.** $D(5, 2)$; $C(3, -1)$ é o centro da circunferência.

Seja $P(x, y)$ um ponto da reta tangente à circunferência no ponto $D$

$\overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

$\overrightarrow{DP} = P - D = (x, y) - (5, 2) = (x-5, y-2)$

$\overrightarrow{CD} = D - C = (5, 2) - (3, -1) = (2, 3)$

$\overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow (x-5, y-2) \cdot (2, 3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x-5) + 3(y-2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - 10 + 3y - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x + 3y - 16 = 0$

Uma equação da reta tangente à circunferência no ponto $D$ é $2x + 3y - 16 = 0$ .

Vejamos se os pontos $A$ e $B$ pertencem a esta reta.

$A(11, -2)$: $2 \times 11 + 3 \times (-2) - 16 = 0 \Leftrightarrow 22 - 6 - 16 = 0 \Leftrightarrow 22 - 22 = 0$ (verdadeiro)

$B(8, 0)$: $2 \times 8 + 3 \times 0 - 16 = 0 \Leftrightarrow 16 - 16 = 0$ (verdadeiro)

Como os pontos $A$ e $B$ pertencem a esta reta, podemos concluir que a reta $AB$ é tangente à circunferência no ponto $D$ .

**4.3.** $2x+3y-16=0 \Leftrightarrow 3y=-2x+16 \Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}x+\frac{16}{3}$

O declive da reta $AB$ é igual a $-\frac{2}{3}$.

Se $\alpha$ é a inclinação da reta $AB$, então $\tan\alpha=-\frac{2}{3}$, com $0\leq\alpha\leq\pi$, em radianos.

$$\frac{\cos\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)\times\sin(\pi+\alpha)}{\tan(\pi-\alpha)}=\frac{\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\times[-\sin(\alpha)]}{-\tan(\alpha)}=$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\times\sin(\alpha)}{\tan\alpha}=\frac{-\sin(\alpha)\times\sin(\alpha)}{\tan\alpha}=-\sin^2\alpha\times\frac{1}{\tan\alpha}$$

Precisamos de determinar o valor de $\sin^2\alpha$.

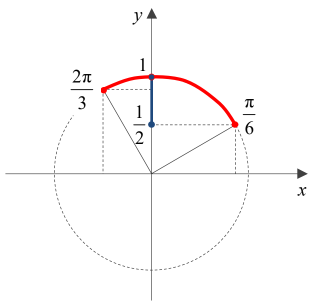
$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow 1+\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow 1+\frac{4}{9}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{13}{9}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{9}{13}$$

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{9}{13}=\frac{4}{13}$$

$$-\sin^2\alpha\times\frac{1}{\tan\alpha}=-\frac{4}{13}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{6}{13}$$

**5.** $f(x)=\sin x$ e $D_f=\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$




$$\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\leq\sin x\leq 1$$

$$D'_f=\left[\frac{1}{2}\ ,\ 1\right]$$

**Resposta: (C)**

**6.** **6.1.** $u_1=4\wedge 2u_{n+1}=u_n\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=4\\ u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n,\ \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$

Portanto, $(u_n)$ é uma progressão geométrica de razão $r=\frac{1}{2}$ e primeiro termo $u_1=4$.

Então, $u_n=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ \forall n\in\mathbb{N}$.

**6.2.** $u_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$

$u_m = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}, \forall m \in \mathbb{N}$

$$u_n \times u_m = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} =$$

$$= 4 \times 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{m} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} =$$

$$= 4 \times 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1+m} \times 2 =$$

$$= 8 \times 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+m)-1} =$$

$$= 8 \times u_{n+m}$$

**6.3.** $\lim S_n = \lim\left(u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}\right) = \lim\left(4 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right) = 4 \times \frac{1-\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 4 \times 2 \times (1-0) = 8$

**Resposta: (C)**

**7.** Pelo teorema de Carnot, temos:

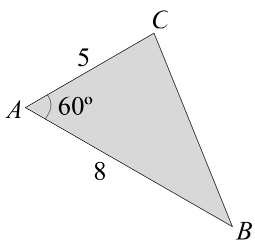
$\overline{BC}^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \cos 60^\circ$

$\overline{BC}^2 = 64 + 25 - 2 \times 40 \times \frac{1}{2}$

$\overline{BC}^2 = 89 - 40$

$\overline{BC}^2 = 49$

$\overline{BC} = 7$




**Resposta: (D)**