Proposta de teste de avaliação

Matemática A

11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

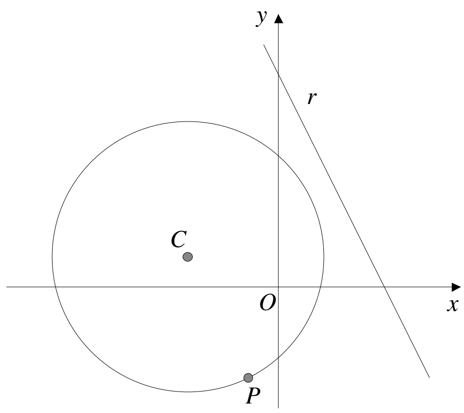
Caderno 1

(é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

1. Na figura estão representadas, num plano munido de um referencial ortonormado:

- a circunferência de centro *C* definida pela equação $(x+3)^2+(y-1)^2=20$;
- a reta *r* de equação $2x+y-7=0$;
- o ponto *P*, ponto da circunferência com abcissa -1 e ordenada negativa.



1.1. Determine uma equação da reta *s* que passa no ponto *P* e é perpendicular à reta *r*.

1.2. A reta *s* é tangente à circunferência? Justifique.

1.3. Determine a amplitude do ângulo APC, sendo o ponto *A* a imagem do ponto *C* na reflexão de eixo Oy.

Apresente o resultado em graus, arredondado às décimas.

1.4. Seja α a inclinação da reta *r*, em radianos.

Qual é o valor de α, arredondado às centésimas?

(A) 2,03

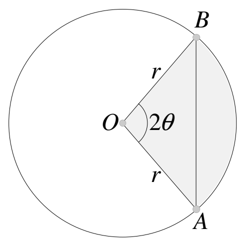
(B) 4,25

(C) $-1,11$

(D) 2,19

2. Na figura está representada uma circunferência de centro O e raio $r > 0$, bem como uma corda AB.

O arco correspondente à corda AB tem amplitude 2θ, em radianos, com $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.



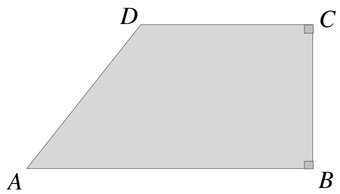
2.1. Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é dada, em função de θ, por $A(\theta) = r^2 \sin\theta\cos\theta$.

2.2. Justifique que a área do setor circular definido pelo ângulo AOB é dada por $S(\theta) = \theta r^2$ e, usando a calculadora gráfica, determine o valor de θ para o qual a área deste setor circular é o dobro da área do triângulo $[ABC]$.

Na sua resposta deve:

- escrever a equação que traduz o problema;
- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), bem como o respetivo referencial.
- indicar o valor de θ, em radianos, com arredondamento às centésimas.

3. Na figura está representado o trapézio retângulo $[ABCD]$.



Sabe-se que $\overline{AB} = 10\text{ cm}$ e $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 40$.

Então, pode afirmar-se que:

(A) $\overline{BC} = 4\text{ cm}$ **(B)** $\overline{BC} = 6\text{ cm}$

(C) $\overline{DC} = 6\text{ cm}$ **(D)** $\overline{DC} = 4\text{ cm}$

Fim do Caderno 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item							
Cotação (em pontos)							
1.1.	**1.2.**	**1.3.**	**1.4.**	**2.1.**	**2.2**	**3.**	
16	16	16	10	17	17	10	**102**

Formulário

Área de um setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Caderno 2

(não é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

4. No intervalo $[0, 2\pi[$, quantas soluções tem a equação $\tan x = \cos x$?

(A) Nenhuma

(B) Duas

(C) Três

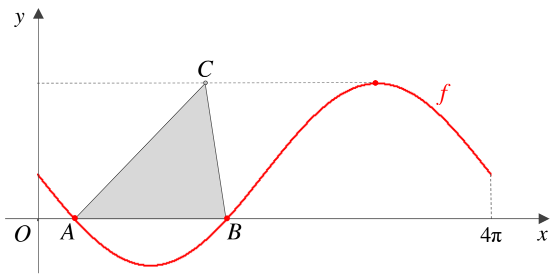
(D) Quatro

5. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 1 - 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

5.1. Prove que f é uma função periódica de período 4π .

5.2. Determina a expressão geral das soluções da equação $f(x) = f(2x)$.

5.3. Na figura está representada parte do gráfico da função f bem como o triângulo $[ABC]$.



Sabe-se que:

- A e B são pontos de interseção do gráfico de f com o eixo das abcissas;
- a ordenada do ponto C é igual ao máximo de f .

Determine a área do triângulo $[ABC]$.

6. Mostre que, para todos os valores reais de θ para os quais a expressão tem significado,

$$\frac{\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\frac{1}{1-2\sin^2\theta}$$

7. Considere, para um certo número real a, diferente de zero, as retas r e s definidas num referencial ortonormado xOy pelas equações:

$$r:(x,\ y)=(2,1)+k(a,1-a)\ ,\ k\in\mathbb{R}$$

$$s:ax-y+1=0$$

Sabendo que as retas r e s são perpendiculares, qual é o valor de a?

(A) -2

(B) -1

(C) 1

(D) 2

8. Seja α a inclinação da reta r definida pala equação $y=\sqrt{2}x+\sqrt{2}$.

Qual é o valor de $\cos\alpha$?

(A) $\sqrt{3}$

(B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(C) $\sqrt{6}$

(D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

Fim da prova

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item							
Cotação (em pontos)							
4	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**6.**	**7.**	**8.**	
10	17	17	17	17	10	10	**98**
TOTAL (Caderno1 + Caderno2)							**200**

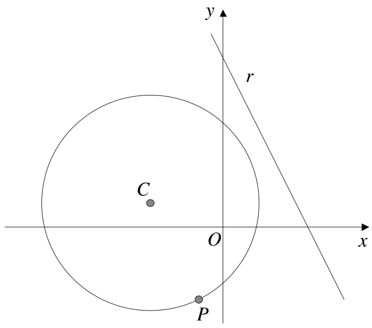
Proposta de resolução

Caderno 1

1. $C(-3, 1)$ é o centro da circunferência $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 20$.

$r: 2x + y - 7 = 0 \Leftrightarrow y = -2x + 7$

$P(-1, y)$, com $y < 0$, é um ponto da circunferência.



1.1. $P(-1, y)$ pertence à circunferência $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 20$.

$(-1+3)^2 + (y-1)^2 = 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 + (y-1)^2 = 20 \Leftrightarrow (y-1)^2 = 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y - 1 = -4 \vee y - 1 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -3 \vee y = 5$

Como $y < 0$, temos $P(-1, -3)$.

Declive da reta $r: m_r = -2$

Declive da reta $s: m_s = -\frac{1}{m_r} = \frac{1}{2}$

Como $P(-1, -3) \in s$, vem

$s: y + 3 = \frac{1}{2}(x+1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - 3 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

$s: y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

1.2. $C(-3, 1)$ e $P(-1, -3)$

Declive da reta *CP*: $m_{CP} = \frac{-3-1}{-1+3} = \frac{-4}{2} = -2$

$m_{CP} \times m_s = -2 \times \frac{1}{2} = -1$

Logo, como $m_{CP} \times m_s = -1$, a reta *s* é perpendicular ao raio $[CP]$, no ponto *P*.

Portanto, a reta *s* é tangente à circunferência no ponto P.

1.3. $P(-1,-3)$, $C(-3,1)$ e $A(3,1)$

$\overrightarrow{PA} = A - P = (3,1)-(-1,-3) = (4,4)$

$\overrightarrow{PC} = C - P = (-3,1)-(-1,-3) = (-2,4)$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PC}}\right) = \frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}}{\|\overrightarrow{PA}\|\times\|\overrightarrow{PC}\|}$$

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC} = (4,4)\cdot(-2,4) = -8+16 = 8$

$\|\overrightarrow{PA}\| = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{2\times 4^2} = 4\sqrt{2}$

$\|\overrightarrow{PC}\| = \sqrt{(-2)^2+4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = \sqrt{4\times 5} = 2\sqrt{5}$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PC}}\right) = \frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}}{\|\overrightarrow{PA}\|\times\|\overrightarrow{PC}\|} = \frac{8}{4\sqrt{2}\times 2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Se $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PC}}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}$, então $A\hat{P}C \approx 71{,}6^\circ$.

1.4. $m_r = -2$

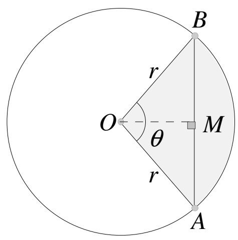
$\tan\alpha = -2 \wedge \alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

$\alpha = \pi - \arctan(2)$

$\alpha \approx 2{,}03$ rad

Resposta: (A)

2.



2.1. Seja M o ponto médio de $[AB]$.

Como o triângulo $[ABO]$ é isósceles, $[OM]\perp[AB]$.

Então, $A\hat{O}M = \theta$

$$\frac{\overline{OM}}{r} = \cos\theta \Leftrightarrow \overline{OM} = r\cos\theta$$

$$\frac{\overline{AM}}{r} = \sin\theta \Leftrightarrow \overline{AM} = r\sin\theta$$

$$A_{[ABO]} = \frac{\overline{AB}\times\overline{OM}}{2} = \frac{2\times\overline{AM}\times\overline{OM}}{2} = r\sin\theta\times r\cos\theta$$

$A(\theta) = r^2\sin\theta\cos\theta$

2.2. A área do setor circular é dada por $\frac{\alpha r^2}{2}$ com $\alpha = 2\theta$.

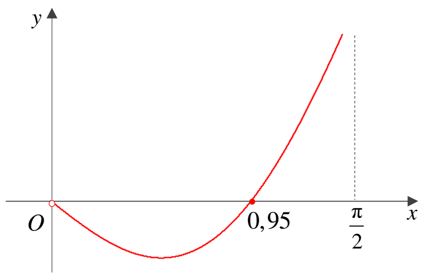
Logo, $S(\theta) = \frac{2\theta r^2}{2} = \theta r^2$.

Pretendemos resolver graficamente a equação

$$S(\theta) = 2 \times A(\theta) \Leftrightarrow \theta r^2 = 2r^2 \sin\theta\cos\theta \overset{r \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

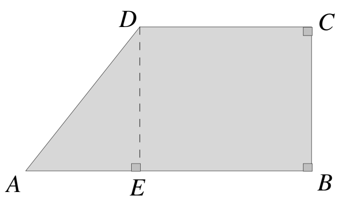
$$\Leftrightarrow \theta = 2\sin\theta\cos\theta \Leftrightarrow \theta - 2\sin\theta\cos\theta = 0$$

Determinando, com recurso à calculadora, o zero da função $y_1 = x - 2\sin x\cos x$, obteve-se o resultado seguinte.



A área do setor circular é o dobro da área do triângulo $[ABC]$ para $\theta \approx 0{,}95$ rad.

3. Seja E a projeção ortogonal de D na reta AB.



Então $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overline{AB} \times \overline{AE}$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 40 \Leftrightarrow \overline{AB} \times \overline{AE} = 40 \Leftrightarrow$ $\quad \big| \overline{AB} = 10 \text{ cm}$

$\Leftrightarrow 10 \times \overline{AE} = 40 \Leftrightarrow \overline{AE} = 4$

$\overline{AE} + \overline{EB} = \overline{AB}$

$4 + \overline{EB} = 10 \Leftrightarrow \overline{EB} = 6$

$\overline{DC} = \overline{EB} = 6 \text{ cm}$

Resposta: (C)

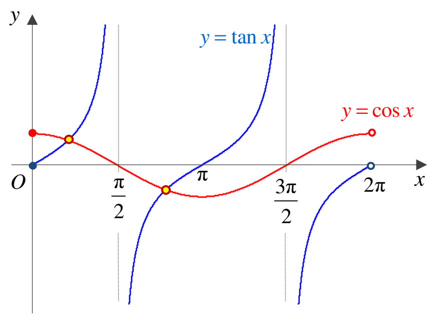
Caderno 2

4. Esboçando, no intervalo $[0, 2\pi[$, os gráficos das funções $\tan x$ e $\cos x$, podemos concluir que a equação

$$\tan x = \cos x$$

tem, neste intervalo, duas soluções.

Resposta: (B)



5.

5.1. $f(x)=1-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$; $\quad D_f=\mathbb{R}$

Se $x\in D_f$, então $x+4\pi\in D_f$, porque $D_f=\mathbb{R}$.

$$f(x+4\pi)=1-2\sin\left(\frac{x+4\pi}{2}\right)=1-2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{4\pi}{2}\right)=$$

$$=1-2\sin\left(\frac{x}{2}+2\pi\right)= \qquad \text{(A função seno é periódica de período } 2\pi\text{.)}$$

$$=1-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)=f(x)$$

$\forall x\in D_f, x+4\pi\in D_f$ e $f(x+4\pi)=f(x)$.

Logo, *f* é uma função periódica de período 4π.

5.2. $f(x)=f(2x)\Leftrightarrow 1-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)=1-2\sin\left(\frac{2x}{2}\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -2\sin\left(\frac{x}{2}\right)=-2\sin(x)\Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\sin(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=x+2k\pi \vee \frac{x}{2}=\pi-x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=2x+4k\pi \vee x=2\pi-2x+4k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x=4k\pi \vee 3x=2\pi+4k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=4k\pi \vee x=\frac{2\pi}{3}+\frac{4k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$$

5.3. As abcissas de *A* e *B* são os zeros de *f* em $]0, 4\pi[$.

$f(x)=0\wedge x\in\,]0,4\pi[\,\Leftrightarrow$

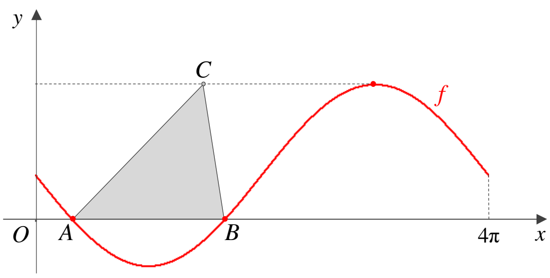
$$\Leftrightarrow 1-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\wedge\frac{x}{2}\in\,]0,2\pi[\,\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\wedge\frac{x}{2}\in\,]0,2\pi[\,\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}\vee\frac{x}{2}=\pi-\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{6}\vee x=\frac{10\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}\vee x=\frac{5\pi}{3}$$

$$\overline{AB}=\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$$



Máximo de *f*:

Se $x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ toma todos os valores do intervalo $[-1, 1]$.

$$-1 \leq \sin\left(\frac{x}{2}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-2 \leq 1+2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \leq 1+2 \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq 3$$

O máximo de f é igual a 3. Logo, a altura, h, do triângulo $[ABC]$ é igual a 3.

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times h}{2} = \frac{\frac{4\pi}{3} \times 3}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$$

6. $$\frac{\cos\theta}{\cos\theta - \sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} =$$

$$= \frac{\cos\theta(\cos\theta + \sin\theta) - \sin\theta(\cos\theta - \sin\theta)}{(\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta)} =$$

$$= \frac{\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} =$$

$$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{1 - \sin^2\theta - \sin^2\theta} = \frac{1}{1 - 2\sin^2\theta}$$

7. $s: ax - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = ax + 1$

O declive da reta *s* é igual a *a*. Logo, $\vec{s} = (1, a)$ é um vetor diretor da reta *s*.

$\vec{r} = (a, 1-a)$ é um vetor diretor da reta *r*.

r e *s* são perpendiculares $\Leftrightarrow \vec{r} \cdot \vec{s} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (a, 1-a) \cdot (1, a) = 0 \Leftrightarrow a + (1-a)a = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a + a - a^2 = 0 \Leftrightarrow 2a - a^2 = 0 \Leftrightarrow a(2-a) = 0$$

Como $a \neq 0$, vem $a = 2$.

Resposta: **(D)**

8. $\tan\alpha = \text{declive de } r \Leftrightarrow \tan\alpha = \sqrt{2}\,,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ $\quad | \ r: y = \sqrt{2}x + \sqrt{2}$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = 3 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{3}$$

Como $\cos\alpha > 0$, vem $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Resposta: (B)