Proposta de teste de avaliação

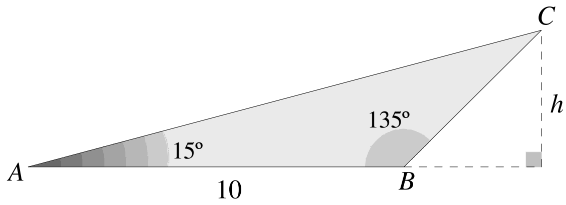
Matemática A

11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

CADERNO I (45 minutos – com calculadora)

1. Na figura está representado o triângulo $[ABC]$.



Sabe-se que:

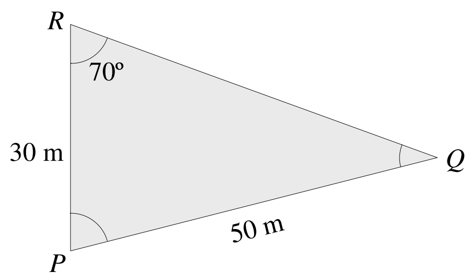
- $\overline{AB} = 10$
- $B\hat{A}C = 15º$
- $C\hat{B}A = 135º$
- h é a medida da altura do triângulo $[ABC]$, relativa ao lado $[AB]$.

Qual é o valor de h, arredondado às centésimas?

(A) 2,68 **(B)** 2,59

(C) 3,66 **(D)** 3,70

2. O triângulo $[PQR]$ da figura representa o esquema de um terreno em que $\overline{PQ} = 50$ m e $\overline{PR} = 30$ m.



Sabe-se ainda que o ângulo PRQ tem 70º de amplitude.

2.1. Qual é, em graus com arredondamento às centésimas, a amplitude do ângulo RQP?

(A) 34,32º **(B)** 75,68º

(C) 42,00º **(D)** 34,06º

2.2. Determine a área do terreno.

Apresente o resultado em metros quadrados arredondado às unidades.

3. Considere a função f definida em $]0, \pi[$ por $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$.

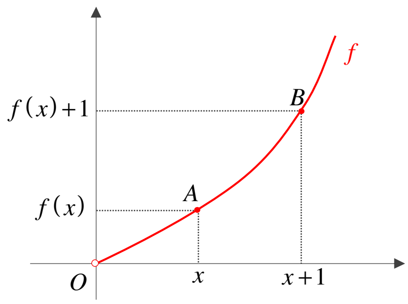
3.1. Determine o valor exato de $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

Apresente o resultado na forma $a + b\sqrt{c}$, com $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

3.2. Seja $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Mostre que $f\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) \times f\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = 1$

3.3. Existem dois pontos A e B pertencentes ao gráfico da função f, de abcissas x e $x+1$, respetivamente, cujas ordenadas também diferem de uma unidade.



Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto *A*.

Na sua resposta:

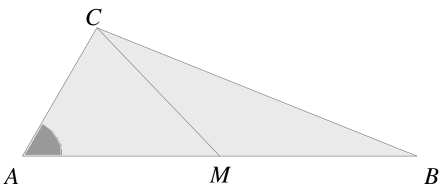
- equacione o problema;
- reproduza num referencial o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permitem resolver a equação;
- apresente o valor pedido arredondado às centésimas.

Caderno II (45 min – sem calculadora)

---

4. Considere o triângulo $[ABC]$ em que:

- $\overline{AB} = 8$
- $\overline{BC} = 7$
- $\overline{AC} = 3$
- M é o ponto do lado $[AB]$ tal que $[CM]$ é uma mediana do triângulo.



4.1. Mostre que a amplitude do ângulo BAC é igual a 60º.

4.2. O comprimento de $[CM]$ é igual a:

(A) $\sqrt{27}$ **(B)** $\sqrt{13}$

(C) $\sqrt{55}$ **(D)** $\sqrt{37}$

5. Qual é o valor de $\arctan\left(-\sqrt{3}\right) - \arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{3}\right)$?

(A) $-\frac{2\pi}{3}$ **(B)** $-\frac{5\pi}{3}$

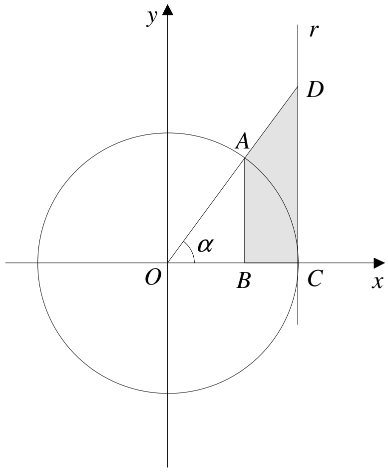
(C) π **(D)** 0

6. Considere a função f definida em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ por $f(x) = \frac{\sin^3 x}{2\cos x}$.

Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro na origem e raio 1 bem como a reta r de equação $x = 1$.

Sabe-se que:

- o ponto A se desloca ao longo da circunferência, no primeiro quadrante;
- a semirreta $\dot{O}A$ interseta a reta r no ponto D;
- o ponto C tem coordenadas $(1, 0)$;
- o ponto B pertence ao eixo Ox e tem abcissa igual à do ponto A.



Para cada posição do ponto A, seja α a amplitude, em radianos, do ângulo COA.

6.1. Mostre que, para cada $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a área do trapézio $[ABCD]$ é dada por $f(\alpha)$.

6.2. Seja $\beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $\tan\beta = 2$. Determine $f(\beta)$.

6.3. Se $\overline{CD} = 1$, a área do trapézio $[ABCD]$ é igual a:

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{\pi}{4}$ **(D)** $\frac{3}{4}$

6.4. Determine $\overline{AD}$ sabendo que $\overline{OB} = \frac{1}{2}$.

FIM

Cotações:

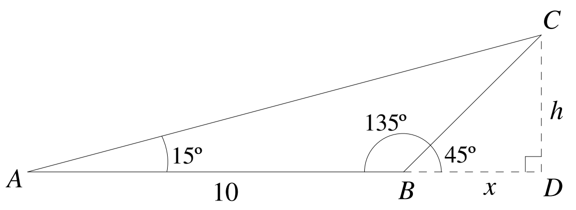
Caderno 1						
1.	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.**	**Total**
10	10	20	20	20	20	**100**

Caderno 2							
4.1.	**4.2.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**6.3.**	**6.4**	**Total**
15	10	10	20	20	10	15	**100**

Proposta de resolução

Caderno I

1. $D\hat{B}C = 180° - C\hat{B}A = 180° - 135° = 45°$



Seja $h = \overline{CD}$ e $\overline{BD} = x$.

$\frac{h}{x} = \tan 45° \Leftrightarrow \frac{h}{x} = 1 \Leftrightarrow h = x$

$$\frac{h}{x+10} = \tan 15° \Leftrightarrow \frac{h}{h+10} = \tan 15° \Leftrightarrow \quad | \, h = x$$

$$\Leftrightarrow h = h\tan 15° + 10\tan 15° \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h - h\tan 15° = 10\tan 15° \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h(1 - \tan 15°) = 10\tan 15° \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{10\tan 15°}{1 - \tan 15°}$$

$h \approx 3{,}66$

Resposta: (C)

2.1. Pela Lei dos Senos, temos:

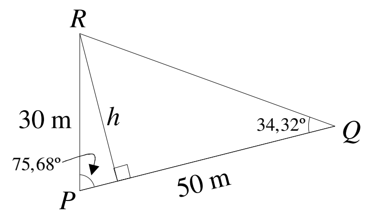
$$\frac{\sin 70°}{50} = \frac{\sin Q}{30} \Leftrightarrow \sin Q = \frac{30\sin 70°}{50}$$

Como $\sin Q \approx 0{,}5638$, vem $Q \approx 34{,}32°$, ou seja, $R\hat{Q}P \approx 34{,}32°$.

Resposta: (A)

2.2. $Q\hat{P}R \approx 180° - 70° - 34{,}32° \approx 75{,}68$

Seja h a altura do triângulo $[PQR]$ relativa ao vértice R.



$\frac{h}{30} \approx \sin(75{,}68°)$

$h \approx 30\sin(75{,}68°)$

$$A_{[PQR]} = \frac{\overline{PQ} \times h}{2} \approx \frac{50 \times 30\sin(75{,}68°)}{2} \approx 727$$

A área do terreno é, aproximadamente, igual a 727 m^2.

3. $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$, $x \in \left]0, \pi\right[$

3.1. $$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\sin\frac{5\pi}{6}}{1 + \cos\frac{5\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{2\left(2-\sqrt{3}\right)} =$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)} = \frac{2+\sqrt{3}}{2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$$

Cálculo auxiliar

$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3.2. $f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\times f\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\times\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\times\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=.$

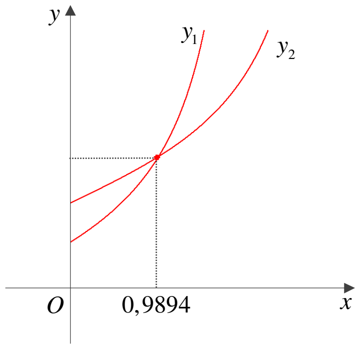
$$=\frac{\cos^2\alpha}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}=\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1$$

3.3. A abcissa do ponto A é a solução da equação $f(x+1)=f(x)+1$

Introduziram-se na calculadora as funções $y_1=f(x+1)=\frac{\sin(x+1)}{1+\cos(x+1)}$ e

$y_2=f(x)+1=\frac{\sin x}{1+\cos x}+1$ e determinou-se a abcissa do ponto de interseção dos respetivos gráficos, obtendo-se o resultado que se apresenta ao lado.

Assim, $x\approx 0,99$.



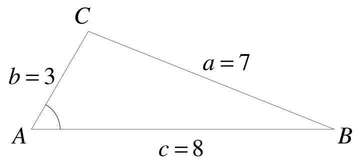
Caderno II

4.1. Pelo Teorema de Carnot,

$a^2=b^2+c^2-2bc\times\cos\hat{A}$

$7^2=3^2+8^2-2\times3\times8\times\cos\hat{A}\Leftrightarrow 49=9+64-48\times\cos\hat{A}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 48\times\cos\hat{A}=9+64-49\Leftrightarrow\cos\hat{A}=\frac{24}{48}\Leftrightarrow\cos\hat{A}=\frac{1}{2}$



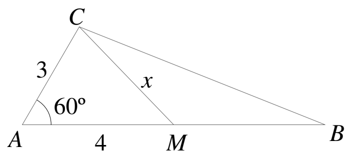
Logo, como BAC é um ângulo agudo, $B\hat{A}C=60^\circ$.

4.2. Se $[CM]$ é uma mediana do triângulo então $\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times8=4$.

Aplicando novamente o Teorema de Carnot, com $\overline{CM}=x$.

$x^2=3^2+4^2-2\times3\times4\times\cos60^\circ\Leftrightarrow x^2=9+16-2\times12\times\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=25-12\Leftrightarrow x^2=13\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x=\sqrt{13}$



Resposta: (B)

5. $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)-\arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{3}\right)=x-y$

$\arctan\left(-\sqrt{3}\right)=x\Leftrightarrow\tan x=-\sqrt{3}\wedge x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}$

$\arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{3}\right)=y\Leftrightarrow\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=y\Leftrightarrow$ $\quad\left|\ \sin\frac{4\pi}{3}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\right.$

$\Leftrightarrow\sin y=-\frac{\sqrt{3}}{2}\wedge y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\Leftrightarrow y=-\frac{\pi}{3}$

$\arctan\left(-\sqrt{3}\right)-\arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{3}\right)=x-y=-\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=0$

Resposta: (D)

6.1. $\overline{OB} = \cos\alpha$, $\overline{BA} = \sin\alpha$ e $\overline{CD} = \tan\alpha$

$$A_{[ABCD]} = A_{[OCD]} - A_{[OBA]} = \frac{\overline{OC}\times\overline{CD}}{2} - \frac{\overline{OB}\times\overline{BA}}{2} =$$

$$= \frac{1\times\tan\alpha}{2} - \frac{\cos\alpha\times\sin\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \sin\alpha\cos\alpha\right) = \qquad \left|\ \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right.$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{\sin\alpha - \sin\alpha\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}\times\frac{\sin\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)}{\cos\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{\sin\alpha\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin^3\alpha}{2\cos\alpha} \qquad \left|\ 1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha\right.$$

Portanto, a área do trapézio $[ABCD]$ é dada por $f(\alpha)$.

6.2. $\tan\beta = 2$

- Como $1+\tan^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta}$, vem $1+2^2 = \frac{1}{\cos^2\beta} \Leftrightarrow 5 = \frac{1}{\cos^2\beta} \Leftrightarrow \cos^2\beta = \frac{1}{5}$

  Sendo $\beta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos\beta > 0$ pelo que $\cos\beta = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

- Dado que $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$, temos $\sin^2\beta + \frac{1}{5} = 1 \Leftrightarrow \sin^2\beta = 1-\frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin^2\beta = \frac{4}{5}$

  Como $\beta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\sin\beta > 0$ pelo que $\sin\beta = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$f(\beta) = \frac{\sin^3\beta}{2\cos\beta} = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^3}{2\times\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}\times\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5}$$

6.3. $\overline{CD} = 1 \Leftrightarrow \tan\alpha = 1$. Logo, como $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, temos $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Portanto, se $\overline{CD} = 1$, $A_{[ABCD]} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2}\times\frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$

Resposta: (A)

6.4. $A(\cos\alpha, \sin\alpha)$ e $D(1, \tan\alpha)$

$\overline{OB} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$. Como $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, temos $\alpha = \frac{\pi}{3}$ pelo que $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\tan\alpha = \sqrt{3}$.

Então, $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $D\left(1, \sqrt{3}\right)$ pelo que

$$\overline{AD} = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

Em alternativa, pelo Teorema de Tales, $\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \frac{1+\overline{AD}}{1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 1+\overline{AD} = 2 \Leftrightarrow \overline{AD} = 1$.