Proposta de teste de avaliação

Matemática A

11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Caderno 1

(é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.
Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

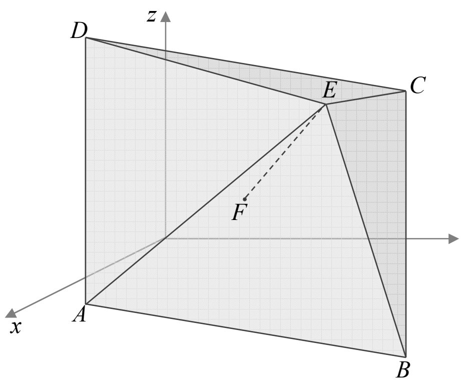
---

1. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide quadrangular regular $[ABCDE]$.

O ponto F é o centro da base da pirâmide.

Sabe-se que:

- o ponto E tem coordenadas $(2,4,3)$;
- para determinado $a \in \mathbb{R}$, o plano ABC pode ser definido pela equação $x+2y+2z+a=0$;
- a reta que passa no ponto E e é perpendicular ao plano ABC interseta este plano num ponto de abcissa 1;
- o vetor $\overrightarrow{EC}$ tem coordenadas $(-5,-1,-1)$.



1.1. Mostre que o ponto F tem coordenadas $(1,2,1)$.

1.2. Qual é o valor de a?

(A) -7 **(B)** -16 **(C)** -9 **(D)** 9

1.3. Determine o volume da pirâmide.

1.4. Qual das seguintes condições define uma superfície esférica tangente ao plano ABC no ponto F?

(A) $x^2+y^2+z^2=6$

(B) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$

(C) $(x+3)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=27$

(D) $(x-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=9$

1.5. Determine um valor aproximado à décima do grau da amplitude do ângulo DEB.

2. Considere a sucessão (a_n) definida por:

$$\begin{cases} a_1 = -50 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \ , \ \text{para todo o } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Sabe-se que, para determinado $p \in \mathbb{N}$, a soma dos primeiros p termos desta sucessão é igual a p.

Determine o valor de p.

3. Seja (u_n) uma sucessão de termos positivos tal que:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \text{, para todo o } n \in \mathbb{N}$$

Qual das afirmações seguintes **não é** necessariamente verdadeira?

(A) (u_n) é decrescente

(B) (u_n) é limitada

(C) (u_n) é convergente

(D) (u_n) tende para zero

Fim do Caderno 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item							
Cotação (em pontos)							
1.1.	**1.2.**	**1.3.**	**1.4.**	**1.5.**	**2**	**3.**	
15	10	20	10	15	20	10	**100**

Caderno 2

(não é permitido o uso de calculadora)

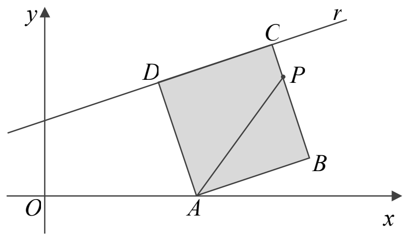
Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

---

4. Na figura está representado, num plano munido de um referencial ortonormado, o quadrado $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Ox e tem abcissa 4;
- os pontos B, C e D têm coordenadas positivas;
- a reta r é definida pela equação $y = \frac{1}{3}x + 2$ e passa nos pontos D e C;
- o ponto P pertence ao segmento de reta $[BC]$.



4.1. Defina a reta AD pela equação reduzida.

4.2. Mostre que $\overrightarrow{AD} = (-1, 3)$ e determine as coordenadas do ponto C.

4.3. O valor do produto escalar $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$ é:

(A) $\sqrt{10}$ **(B)** 10 **(C)** $2\sqrt{10}$ **(D)** 20

5. De uma progressão geométrica (u_n), de termos positivos, sabe-se que:

$$u_3 = \frac{3}{8} \wedge u_n = 16u_{n+2}, \text{ qualquer que seja } n \in \mathbb{N}$$

5.1. Mostre que $u_n = 3 \times 2^{3-2n}$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

5.2. Seja S_n a soma dos n primeiros termos de (u_n).

O valor de $\lim S_n$ é:

(A) $\frac{4}{3}$ **(B)** 6 **(C)** 8 **(D)** 3

6. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-2x}{\sqrt{x^2+3}} & \text{se } x\leq 1\\ \dfrac{k(x-1)}{\sqrt{x}-x} & \text{se } x>1\end{cases}\qquad (k \text{ designa um número real})$$

6.1. Determine k, sabendo que f é contínua em $x=1$.

6.2. Determine $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Fim da prova

Formulário

Geometria

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3}\times \text{Área da base}\times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3}\times \text{Área da base}\times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2}\times n$

Progressão geométrica: $u_1\times\frac{1-r^n}{1-r}$

COTAÇÕES (Caderno 2)

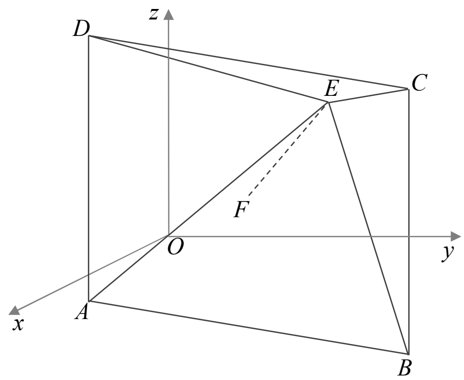
Item							
Cotação (em pontos)							
4.1.	**4.2.**	**4.3.**	**5.1**	**5.2.**	**6.1.**	**6.2.**	
15	15	10	15	10	20	15	**100**
TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)							**200**

Proposta de resolução

Caderno 1

1. $E(2,4,3)$; $ABC:\ x+2y+2z+a=0$; $\overrightarrow{EC}(-5,-1,-1)$

1.1. Seja r a reta que passa no ponto $E(2,4,3)$ e é perpendicular ao plano ABC



O vetor de coordenadas $(1,2,2)$ é perpendicular ao plano ABC. Logo é um vetor diretor da reta r.

Equação vetorial da reta r:

$(x,y,z)=(2,4,3)+k(1,2,2),\ k\in\mathbb{R}$

A reta r interseta o plano ABC num ponto de abcissa $x=1$.

$(1,y,z)=(2,4,3)+k(1,2,2),\ k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1=2+k\\ y=4+2k\\ z=3+2k\end{cases},\ k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-1\\ y=4+2\times(-1)\\ z=3+2\times(-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-1\\ y=2\\ z=1\end{cases}$$

Portanto, a reta r interseta o plano ABC no ponto de coordenadas $(1,2,1)$.

Dado que a pirâmide $[ABCDE]$ é regular, a interseção da reta r com o plano da base é o ponto F, centro da base da pirâmide. Logo, o ponto F tem coordenadas $(1,2,1)$.

1.2. O ponto $F(1,2,1)$ pertence ao plano $ABC:\ x+2y+2z+a=0$.

Substituindo as coordenadas na equação do plano, vem

$1+2\times2+2\times1+a=0\Leftrightarrow1+4+2+a=0\Leftrightarrow a=-7$

Resposta: **(A)**

1.3. $E(2,4,3)$ e $\overrightarrow{EC}(-5,-1,-1)$

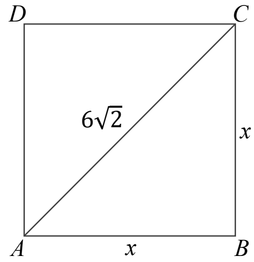
$C=E+\overrightarrow{EC}=(2,4,3)+(-5,-1,-1)=(-3,3,2)$

$\overrightarrow{FC}=C-F=(-3,3,2)-(1,2,1)=(-4,1,1)$

$\|\overrightarrow{FC}\|=\sqrt{(-4)^2+1^2+1^2}=\sqrt{16+1+1}=\sqrt{18}=\sqrt{9\times2}=3\sqrt{2}$

$\|\overrightarrow{AC}\|=2\times\|\overrightarrow{FC}\|=2\times3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

A base $[ABCD]$ da pirâmide é um quadrado cuja diagonal mede $\|\overrightarrow{AC}\| = 2\times\|\overrightarrow{FC}\| = 2\times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$



Seja $\overline{AB} = x$.

$x^2 + x^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 36\times 2 \Leftrightarrow x^2 = 36$

A área da base da pirâmide é igual a 36.

Altura da pirâmide:

$$E(2,4,3),\ F(1,2,1)$$

$$\overrightarrow{EF} = F - E = (1,2,1) - (2,4,3) = (-1,-2,-2)$$

$$h = \|\overrightarrow{EF}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3}A_{\text{base}} \times \text{altura} = \frac{1}{3}\times 36\times 3 = 36$$

1.4. Dado que o ponto F pertence ao plano ABC e $\overrightarrow{EF}$ é perpendicular a esse plano, a superfície esférica de centro em $E(2,4,3)$ e raio $r = \|\overrightarrow{EF}\| = 3$ é tangente a esse plano no ponto F .

Equação da superfície esférica: $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 9$

Resposta: **(D)**

1.5. $D\hat{E}B = A\hat{E}C = 2F\hat{E}C$; $\overrightarrow{EF} = (-1,-2,-2)$; $\overrightarrow{EC} = (-5,-1,-1)$

$$\|\overrightarrow{EF}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\|\overrightarrow{EC}\| = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{25+1+1} = \sqrt{27} = \sqrt{9\times 3} = 3\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EC} = (-1,-2,-2)\cdot(-5,-1,-1) = 5+2+2 = 9$$

$$\cos\left(F\hat{E}C\right) = \cos\left(\overrightarrow{EF}\,\hat{,}\,\overrightarrow{EC}\right) = \frac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EC}}{\|\overrightarrow{EF}\|\times\|\overrightarrow{EC}\|} = \frac{9}{3\times 3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Se $\cos\left(F\hat{E}C\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ então $F\hat{E}C \approx 54{,}736^{\text{o}}$

$$D\hat{E}B = 2\times F\hat{E}C \approx 2\times 54{,}736^{\text{o}} \approx 109{,}5^{\text{o}}$$

2. $\begin{cases} a_1 = -50 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \end{cases}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$

(a_n) é uma progressão aritmética de razão $r = 2$ sendo $a_1 = -50$.

Termo geral de (a_n):

$a_n = a_1 + (n-1) \times r$

$a_n = -50 + (n-1) \times 2 \Leftrightarrow a_n = -50 + 2n - 2 \Leftrightarrow a_n = 2n - 52$

Soma dos n primeiros termos de (a_n): $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \times n$

$$S_p = p \Leftrightarrow \frac{a_1 + a_p}{2} \times p = p \Leftrightarrow \frac{-50 + 2p - 52}{2} \times p = p \Leftrightarrow \quad | \; a_1 = -50 \text{ e } a_n = 2n - 52$$

$$\Leftrightarrow \frac{2p - 102}{2} \times p - p = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p - 51) \times p - p = 0 \Leftrightarrow p(p - 51 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p = 0 \vee p - 52 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p = 52$$

3. É dado que:

- $u_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$;
- $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0$$

Logo, (u_n) é decrescente.

Se $u_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, (u_n) é minorada.

Se (u_n) é decrescente e minorada então é convergente e, portanto, é limitada.

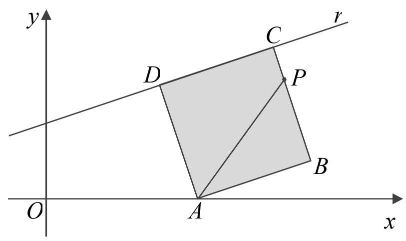
A afirmação (D) não é necessariamente verdadeira.

Por exemplo, se $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$, então (u_n) é uma sucessão decrescente de termos positivos e $\lim u_n = 1$.

Resposta: **(D)**

Caderno 2

4. $A(4,0)$; $r:\ y=\frac{1}{3}x+2$



4.1. A reta AD é perpendicular à reta r porque $[ABCD]$ é um quadrado. Logo, $m_{AD}\times m_{DC}=-1$.

$$m_{AD}\times\frac{1}{3}=-1\Leftrightarrow m_{AD}=-3$$

A reta AD tem declive -3 e passa no ponto $A(4,0)$

$AD:\ y=-3x+b$

$0=-3\times 4+b\Leftrightarrow b=12$

$AD:\ y=-3x+12$

4.2. O ponto D é a interseção das retas r e AD:

$$\begin{cases}y=\frac{1}{3}x+2\\ y=-3x+12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+12=\frac{1}{3}x+2\\ y=-3x+12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-9x+30=x\\ y=-3x+12\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}10x=30\\ y=-3x+12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=-3\times 3+12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=3\end{cases}$$

$D(3,3)$

$\overrightarrow{AD}=D-A=(3,3)-(4,0)=(-1,3)$

$\overrightarrow{DC}$ é perpendicular a $\overrightarrow{AD}$ e $\|\overrightarrow{DC}\|=\|\overrightarrow{AD}\|$

Então, se $\overrightarrow{AD}=(-1,3)$ vem $\overrightarrow{DC}=(3,1)$ ou $\overrightarrow{DC}=(-3,-1)$

$C=D+\overrightarrow{DC}$

Se $\overrightarrow{DC}=(3,1)$, $C=D+\overrightarrow{DC}=(3,3)+(3,1)=(6,4)$

Se $\overrightarrow{DC}=(-3,-1)$, $C=D+\overrightarrow{DC}=(3,3)+(-3,-1)=(0,2)$

Como C tem coordenadas positivas, temos $C(6,4)$.

4.3. Dado que o ponto B é a projeção ortogonal do ponto P na reta AB, vem, pela definição de produto escalar,

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\overline{AB}\times\overline{AB}=\|\overrightarrow{AB}\|^2=\|\overrightarrow{AD}\|^2$ $\quad|\ \overline{AB}=\overline{AD}$

Como $\overrightarrow{AD}=(-1,3)$, vem $\|\overrightarrow{AD}\|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\|\overrightarrow{AD}\|^2=\left(\sqrt{10}\right)^2=10$

Resposta: **(B)**

5. $u_3 = \frac{3}{8} \wedge u_n = 16u_{n+2}$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

5.1. Se (u_n) é uma progressão geométrica de razão r então $u_n = u_k \times r^{n-k}$.

Substituindo n por $n+2$ e k por n, vem:

$u_{n+2} = u_n \times r^{n+2-n}$

$u_{n+2} = 16u_{n+2} \times r^2$ $\quad | \; u_n = 16u_{n+2}$

$\frac{u_{n+2}}{16u_{n+2}} = r^2$ $\quad |$ É dado que $u_{n+2} \neq 0$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$

$r^2 = \frac{1}{16}$

Como (u_n) é uma sucessão de termos positivos, vem $r = \frac{1}{4}$.

$u_n = u_k \times r^{n-k}$

$u_n = u_3 \times r^{n-3}$ $\quad | \; u_3 = \frac{3}{8} \wedge r = \frac{1}{4}$

$$u_n = \frac{3}{8} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-3} = 3 \times \frac{1}{8} \times 4^{3-n} = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(2^2\right)^{3-n} =$$

$$= 3 \times 2^{-3} \times 2^{6-2n} = 3 \times 2^{-3+6-2n} = 3 \times 2^{3-2n}$$

$u_n = 3 \times 2^{3-2n}$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

5.2. $S_n = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

$u_1 = 3 \times 2^{3-2\times 1} = 3 \times 2^1 = 6$ e $r = \frac{1}{4}$

$$\lim S_n = \lim \left[6 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \right] = 6 \times \frac{1 - \lim \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} =$$ $\quad | \; \lim \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

$$= 6 \times \frac{4}{3} \times (1-0) = 2 \times 4 = 8$$

Resposta: **(C)**

6.

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1-2x}{\sqrt{x^2+3}} & \text{se } x\leq 1\\[2ex] \dfrac{k\left(x-1\right)}{\sqrt{x}-x} & \text{se } x>1\end{cases}$$

6.1. f é contínua em $x=1$ se existir $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)$.

$$\lim_{x\to 1^-} f\left(x\right)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-2x}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{1-2}{\sqrt{1^2+3}}=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to 1^+}\frac{k\left(x-1\right)}{\sqrt{x}-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}k\lim_{x\to 1^+}\frac{\left(x-1\right)\left(\sqrt{x}+x\right)}{\left(\sqrt{x}-x\right)\left(\sqrt{x}+x\right)}=$$

$$=k\lim_{x\to 1^+}\frac{\left(x-1\right)\left(\sqrt{x}+x\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-x^2}=k\lim_{x\to 1^+}\frac{\left(x-1\right)\left(\sqrt{x}+x\right)}{x-x^2}=$$

$$=k\lim_{x\to 1^+}\frac{\left(x-1\right)\left(\sqrt{x}+x\right)}{-x\left(x-1\right)}=-k\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}+x}{x}=-k\times\frac{\sqrt{1}+1}{1}=-2k$$

Para que exista $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)$ é necessário e suficiente que

$$\lim_{x\to 1^-} f\left(x\right)=\lim_{x\to 1^+} f\left(x\right)=f\left(1\right)\Leftrightarrow -2k=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow k=\frac{1}{4}$$

Portanto, se a função f é contínua em $x=1$ então $k=\dfrac{1}{4}$.

6.2. $$\lim_{x\to -\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to -\infty}\frac{1-2x}{\sqrt{x^2+3}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to -\infty}\frac{1-2x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{1-2x}{\left|x\right|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{x\left(\frac{1}{x}-2\right)}{-x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{1}{x}-2}{-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}=\frac{0-2}{-\sqrt{1+0}}=2$$