Proposta de teste de avaliação

Matemática A

11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos **|** **Data:**

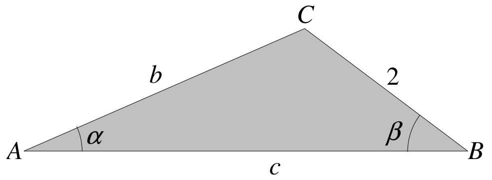
Caderno 1

(é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

---

1. Considere o triângulo $[ABC]$ representado na figura.



Sabe-se que $\overline{BC} = 2$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, $\sin\alpha = 0,4$ e $\sin\beta = 0,6$.

Pode-se afirmar que:

(A) $c = b + 2$ **(B)** $b = 3$ **(C)** $c = 6$ **(D)** $b = 4$

2. Considere as sucessões (u_n) e (v_n) definidas por:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad v_n = 2u_n + 4$$

2.1. Sabendo que $u_n \neq -2, \forall n \in \mathbb{N}$, mostre que (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

2.2. Exprima v_n e u_n em função de n.

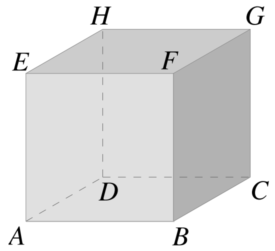
2.3. Sendo S_n a soma dos n primeiros termos de (v_n), determine $\lim S_n$.

3. De uma função *f*, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se qua a reta de equação $y = -7x + 5$ é uma assíntota ao gráfico.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - f(x)}{2x + 1}$?

(A) -2 **(B)** -3 **(C)** 3 **(D)** 4

4. Fixado um referencial cartesiano do espaço, *Oxyz*, considere o cubo [*ABCDEFGH*].



Sabe-se que os vértices *A* e *E* têm coordenadas $(0, 0, -3)$ e $(-1, 2, -1)$, respetivamente.

4.1. Defina por uma equação cartesiana o plano *ABC*.

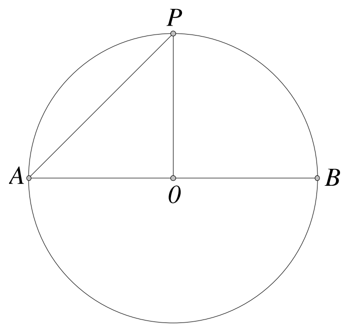
4.2. Seja α a amplitude, em graus, do ângulo *AEO*.

Determine:

a) α, em graus, aproximado às unidades;

b) o valor exato de $\sin\alpha\cos\alpha$.

5. Seja [*AB*] um diâmetro da circunferência de centro *O* representada na figura.



Sabe-se que P é um ponto da circunferência tal que o triângulo $[AOP]$ é retângulo em *O*.

O valor do produto escalar $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$ é:

(A) 4 **(B)** $4\sqrt{2}$

(C) 8 **(D)** 2

Fim do caderno 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item	1.	2.1.	2.2.	2.3.	3.	4.1.	4.2. a)	4.2. b)	5	
Cotação (em pontos)	10	10	10	10	10	15	10	15	10	**100**

Caderno 2

(não é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

6. Considere as funções f e g, de domínios $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ e $\mathbb{R}_0^+$, definidas por:

$$f(x)=\frac{2x-5}{x-2} \quad \text{e} \quad g(x)=\frac{x}{2}+2\sqrt{x}-4$$

Seja t a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 3.

6.1 Determine o conjunto dos números reais x tais que $f(x)\leq 1$.

Apresente o resultado na forma de intervalo ou união de intervalos de números reais.

6.2. Estude a função g quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico.

6.3. Determine a equação reduzida da reta t.

6.4. Mostre que a reta t também é tangente ao gráfico de g e determine as coordenadas do respetivo ponto de tangência.

7. De uma sucessão (u_n) sabe-se que $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}-u_n=2$.

O limite de $\frac{1}{u_n}$ é igual a:

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $+\infty$ **(C)** $-\infty$ **(D)** 0

8. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$.

Sabe-se que $f'(x)=\frac{2}{x}$ para todo o $x\in\mathbb{R}^+$.

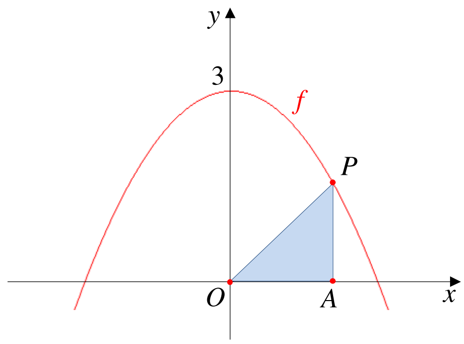
Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{1-x^2}$?

(A) -1 **(B)** 1 **(C)** -2 **(D)** 2

9. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = 3 - 4x^2$$

Na figura estão representados, num referencial cartesiano xOy, parte do gráfico da função f bem como o triângulo $[OAP]$.



Sabe-se que:

- o ponto P se desloca, no primeiro quadrante, ao longo do gráfico de f ;
- o ponto A pertence ao eixo Ox e tem abcissa igual à do ponto P.

Seja $A(x)$ a área do triângulo $[OAP]$ em função da abcissa, x, do ponto P.

9.1. Mostre que $A(x) = \frac{3}{2}x - 2x^3$, com $0 < x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

9.2. Determine a abcissa do ponto P para o qual a medida da área do triângulo $[OAP]$ é máxima.

Fim da prova

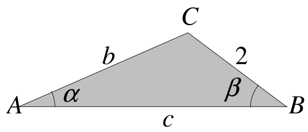
COTAÇÕES (Caderno 2)

Item								
Cotação (em pontos)								
6.1	**6.2.**	**6.3.**	**6.4.**	**7.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	
10	15	15	10	10	10	15	15	**100**
TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)								**200**

Proposta de resolução

Caderno 1

1. Pela lei dos senos:



$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{2}{\sin\alpha}\Leftrightarrow\frac{b}{0,6}=\frac{2}{0,4}\Leftrightarrow b=\frac{2\times 0,6}{0,4}\Leftrightarrow b=3$$

Resposta: (B)

2. $\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n-2}{2}, \text{ para todo } n\in\mathbb{N} \end{cases}$ e $v_n=2u_n+4$

2.1. $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\dfrac{2u_{n+1}+4}{2u_n+4}=\dfrac{2\times\frac{u_n-2}{2}+4}{2u_n+4}=\dfrac{u_n-2+4}{2u_n+4}=\dfrac{u_n+2}{2(u_n+2)}=\dfrac{1}{2}$, dado que $u_n\neq -2$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Logo, (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{2}$.

2.2. $v_1=2u_1+4=2\times 2+4=8$

Como (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{2}$, então:

$$v_n=v_1\times r^{n-1}\Leftrightarrow v_n=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\Leftrightarrow v_n=2^3\times 2^{-n+1}\Leftrightarrow v_n=2^{4-n}$$

$$v_n=2u_n+4\Leftrightarrow 2^{4-n}=2u_n+4\Leftrightarrow 2u_n=2^{4-n}-4\Leftrightarrow u_n=\frac{2^{4-n}}{2}-\frac{4}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_n=2^{4-n-1}-2\Leftrightarrow u_n=2^{3-n}-2$$

Portanto, $v_n=2^{4-n}$ e $u_n=2^{3-n}-2$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

2.3. $$\lim S_n=\lim\left(v_1\times\frac{1-r^n}{1-r}\right)=\lim\left(8\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right)=8\times\frac{1-\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}=8\times 2\times(1-0)=16$$

3. Se $D_f=\mathbb{R}^+$ e a reta de equação $y=-7x+5$ é uma assíntota ao gráfico de *f*, então:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-7$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+7x\right]=5$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-f(x)}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{f(x)}{x}}{\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}}=\frac{1-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}}{2+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}=\frac{1-(-7)}{2+0}=\frac{8}{2}=4$$

Resposta: (D)

4. **4.1.** $A(0,0,-3)$ e $E(-1,2,\ -1)$

$\overrightarrow{EA} = A - E = (0,0,-3)-(-1\ ,\ 2\ ,\ -1)=(1\ ,-2\ ,\ -2)$

O plano *ABC* passa em $A(0,0,-3)$ e o vetor $\overrightarrow{EA}(1\ ,-2\ ,-2)$ é normal a esse plano.

Assim, uma equação do plano *ABC* é:

$1(x-0)-2(y-0)-2(z+3)=0 \Leftrightarrow x-2y-2z-6=0$

4.2. O ângulo *AEO* é o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{EA}$ e $\overrightarrow{EO}$

$\overrightarrow{EA}=(1\ ,-2\ ,\ -2)$

$\overrightarrow{EO}=O-E=(0\ ,0\ ,0)-(-1,2,\ -1)=(1\ ,-2\ ,\ 1)$

$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EO}=(1\ ,-2\ ,\ -2)\cdot(1\ ,-2\ ,\ 1)=1+4-2=3$

$\|\overrightarrow{EA}\|=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{1+4+4}=3$

$\|\overrightarrow{EO}\|=\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{EA}\ ,\ \overrightarrow{EO}}\right)=\frac{\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EO}}{\|\overrightarrow{EA}\|\times\|\overrightarrow{EO}\|}$$

$$\cos\alpha=\frac{3}{3\times\sqrt{6}}\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

a) Se $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}}$, então, usando a calculadora, obtém-se $\alpha=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\approx 66^{\circ}$.

b) $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}}$

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

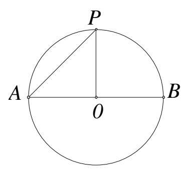
$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2+\sin^2\alpha=1\Leftrightarrow\frac{1}{6}+\sin^2\alpha=1\Leftrightarrow\sin^2\alpha=1-\frac{1}{6}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin^2\alpha=\frac{5}{6}\overset{\alpha\in 1.^{\circ}Q}{\Leftrightarrow}\sin\alpha=\sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$\sin\alpha\cos\alpha=\sqrt{\frac{5}{6}}\times\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{5}}{6}$$

5. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\overline{AO}\times\overline{AB}=$ Definição de produto escalar

$2\times4=8$



Resposta: (C)

Caderno 2

6. $f(x)=\dfrac{2x-5}{x-2}$ e $g(x)=\dfrac{x}{2}+2\sqrt{x}-4$

6.1. $f(x)\le 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x-5}{x-2}\le 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x-5}{x-2}-1\le 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-5-x+2}{x-2}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x-2}\le 0$$

- $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$
- $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{x-3}{x-2}$	$+$		$-$	0	$+$

$f(x)\le 1 \Leftrightarrow x\in \left]2,3\right]$

6.2. $g(x)=\dfrac{x}{2}+2\sqrt{x}-4$

A função g é contínua no seu domínio que é $\left[0\,,+\infty\right[$. Logo, o gráfico da função g não tem assíntotas verticais e apenas pode ter uma assíntota não vertical (em $+\infty$).

Seja $y=mx+b$ uma equação dessa assíntota:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{2}+2\sqrt{x}-4}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{x}}{x}-\frac{4}{x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}-0=$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x\sqrt{x}}=\frac{1}{2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2}+2\sqrt{x}-4-\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x}-4\right)=+\infty$$

Logo, o gráfico de g não tem assíntotas ao seu gráfico.

6.3. $f'(x)=\frac{(2x-5)'(x-2)-(2x-5)(x-2)'}{(x-2)^2}=$

$=\frac{2(x-2)-(2x-5)\times 1}{(x-2)^2}=$

$=\frac{2x-4-2x+5}{(x-2)^2}=\frac{1}{(x-2)^2}$

$f'(3)=\frac{1}{(3-2)^2}=1$

$f(3)=\frac{2\times 3-5}{3-2}=1$

A reta t tem de equação $y=mx+b$.

$m=f'(3)=1$

O ponto de tangência tem coordenadas $(3,1)$.

Equação da reta t:

$y-1=1\times(x-3)\Leftrightarrow y=x-3+1\Leftrightarrow y=x-2$

6.4. $g'(x)=\left(\frac{x}{2}+2\sqrt{x}-4\right)'=\left(\frac{1}{2}x\right)'+2\left(\sqrt{x}\right)'-0=\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

Vejamos os pontos onde o declive da reta tangente ao gráfico de g é igual a 1.

$g'(x)=1\Leftrightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}=1\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}=1-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}=2\wedge x>0\Leftrightarrow x=4$

$g(4)=\frac{4}{2}+2\times\sqrt{4}-4=2+4-4=2$

Como a reta $t: y=x-2$ tem declive igual a 1 e passa no ponto de coordenadas $(4,2)$, então é tangente ao gráfico de g neste ponto.

7. Se $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}-u_n=2$, (u_n) é uma progressão aritmética de razão 2.

Se $u_1=a\in\mathbb{R}$, então: $u_n=a+(n-1)\times 2\Leftrightarrow u_n=2n+a-2$

$\lim\frac{1}{u_n}=\lim\frac{1}{2n+a-2}=\frac{1}{+\infty}=0$

Resposta: (D)

8. $f'(x)=\frac{2}{x}$, para todo o $x\in\mathbb{R}^+$.

$f'(1)=\frac{2}{1}=2$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{1-x^2}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(1-x)(1+x)}=-\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(1+x)}=$$

$$=-\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=$$

$$=-f'(1)\times\frac{1}{2+1}=-2\times\frac{1}{2}=-1$$

Resposta: (A)

9. $f(x)=3-4x^2$

9.1. Área do triângulo $[OAP]$ $=\frac{\overline{OA}\times\overline{AP}}{2}=\frac{x\times f(x)}{2}=\frac{x\times(3-4x^2)}{2}=$

$$=\frac{3x-4x^3}{2}=\frac{3}{2}x-2x^3$$

$$f(x)=0\Leftrightarrow 3-4x^2=0\Leftrightarrow x^2=\frac{3}{4}\Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\vee x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como o ponto P se desloca no 1.º quadrante, então $0<x<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Portanto, $A(x)=\frac{3}{2}x-2x^3$, com $0<x<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

9.2. $A'(x)=\left(\frac{3}{2}x-2x^3\right)'=\frac{3}{2}-6x^2$

$$A'(x)=0\Leftrightarrow\frac{3}{2}-6x^2=0\wedge0<x<\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow6x^2=\frac{3}{2}\wedge0<x<\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{3}{12}\wedge0<x<\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4}\wedge0<x<\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

x	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$
A'		+		–	
A		↗	Máx.	↘	

A medida da área do triângulo $[OAP]$ é máxima para $x=\frac{1}{2}$.