Proposta de teste de avaliação

Matemática A

11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

1. Seja β um ângulo generalizado tal que $\beta = \left(-\frac{7}{5}\pi\,,\,-5\right)$ cujo lado origem coincide com o semieixo positivo Ox. Então, o ângulo $\alpha = 3\pi - \beta$ pertence ao:

(A) 1.º quadrante

(B) 3.º quadrante

(C) 2.º quadrante

(D) 4.º quadrante

2. Seja λ um ângulo do 3.º quadrante.

Sabe-se que $\sin\lambda = \frac{k^2-2}{3}$, pelo que:

(A) $k \in \left]-\sqrt{2}\,,\,-1\right[\cup \left]1\,,\,\sqrt{2}\right[$

(B) $k \in \left]-\sqrt{2}\,,\,\sqrt{2}\right[$

(C) $k \in \left]-\sqrt{2}\,,\,\sqrt{2}\right[\setminus \{1\}$

D) $k \in \left]-\sqrt{2}\,,\,\sqrt{2}\right[\setminus \{-1\,,\,1\}$

3. Considere as funções f e g definidas por:

$$f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{5}\right)-1 \qquad \text{e} \qquad g(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)+5$$

Então:

(A) $D_f = \mathbb{R}$ e $D_g = \mathbb{R}$

(B) $D'_f = [-3\,,1]$ e $D'_g = \mathbb{R}\setminus\{x : x = \pi + 2k\pi,\, k\in\mathbb{Z}\}$

(C) $D_f = \mathbb{R}$ e $D'_g = \mathbb{R}\setminus\{x : x = 2k\pi,\, k\in\mathbb{Z}\}$

(D) $D'_f = [-3\,,1]$ e $D_g = \mathbb{R}\setminus\{x : x = \pi + 2k\pi,\, k\in\mathbb{Z}\}$

4. De uma função f sabe-se que:

- f é par;
- f é periódica de período 4π ;
- uma expressão geral dos zeros de f é $x = \pi + 2k\pi,\, k\in\mathbb{Z}$.

A função $f(x)$ é definida por:

(A) $f(x) = -1+\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

(B) $f(x) = 2\sin\left(\pi+\frac{x}{2}\right)$

(C) $f(x) = 3\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

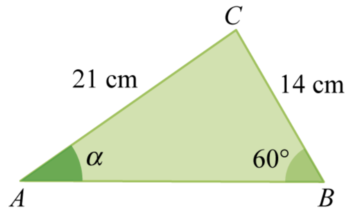
(D) $f(x) = 4+\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

5. Considere o triângulo $[ABC]$ da figura ao lado.

Sabe-se que:

- $\overline{AC} = 21 \text{ cm}$ e $\overline{BC} = 14 \text{ cm}$
- $C\hat{B}A = 60^\circ$

Qual é o valor exato de $\tan \alpha$?



(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(C)** $\sqrt{2}$ **(D)** 2

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Determine o valor exato de:

$$3\cos\left[\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] - \left[\sin\left(\arctan(-1)\right)\right]^2$$

2. Considere a função f tal que:

$$f(x) = 2\cos\left(-x - \frac{13}{2}\pi\right) + \sin(7\pi - x) + \tan(x - 3\pi)$$

2.1. Mostre que $f(x) = -\sin x + \tan x$.

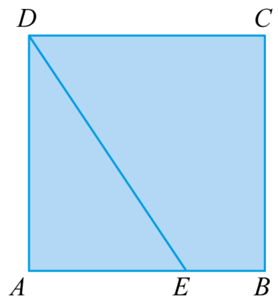
2.2. Sabendo que $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{5} \wedge x \in \left]-\pi ; 0\right[$, calcule o valor exato de f .

3. Considere o quadrado $[ABCD]$ representado na figura ao lado.

Sabe-se que:

- $\overline{AE} = \frac{2}{3}\overline{AB}$
- $B\hat{E}D = 90^\circ + \alpha$

Mostre que $5\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{13}$.



4. Resolva as seguintes equações trigonométricas.

4.1. $4\cos x + 2\sqrt{3} = 0$, em $\mathbb{R}$

4.2. $\tan x = -\tan\left(\frac{3}{8}\pi\right)$, em $\mathbb{R}$

4.3. $2\sin^2 x - 3\sin x = 2$, em $\left]-\pi , \pi\right[$

5. Considere que, no Porto, a temperatura, T, do ar, num certo dia de verão é dada pela expressão seguinte:

$$T(x)=18+8\sin\left[\frac{(x-8)\pi}{12}\right],\ x\in[0\,,24[$$

tal que o ângulo é expresso em radianos e a temperatura em graus Celsius.

5.1. Qual foi a temperatura do ar às 6 horas?

5.2. Qual foi a temperatura máxima atingida?

5.3. A que horas é que a temperatura naquele dia foi de 18 ºC?

5.4. Recorrendo à calculadora gráfica determine durante quanto tempo a temperatura do ar foi superior a 22 ºC.

Na sua resposta apresente o gráfico (ou gráficos e os pontos considerados relevantes para a sua resposta).

6. Considere as funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ tais que:

$$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{e} \quad g(x)=\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right),\ \text{com}\ 0<x<\frac{\pi}{2}$$

Determine, analiticamente, a medida da área do triângulo $[OIM]$, sendo I o ponto de interseção de f e g e M o zero de f.

Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Sempre que nos cálculos intermédios proceder a arredondamentos, conserve no mínimo quatro casas decimais.

FIM

Cotações

Grupo I

1	2	3	4	5	
8	8	8	8	8	**40**

Grupo II

1	2.1.	2.2.	3.	4.1.	4.2.	4.3.	5.1.	5.2.	5.3.	5.4.	6	
12	15	16	16	10	14	16	10	10	12	12	17	**160**

Propostas de resolução

Grupo I

1. $\alpha = 3\pi - \left[\left(-\frac{7}{5}\pi\right) - 5\times 2\pi\right] = 3\pi + \frac{7}{5}\pi + 10\pi = \frac{2\pi}{5} + \pi + 13\pi = \underbrace{\frac{2}{5}\pi}_{1.^{\text{o}}\text{Q}} + 2\times 7\pi$

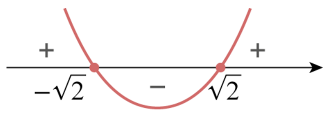
Resposta: (A)

2. $-1 < \sin\lambda < 0 \Leftrightarrow -1 < \frac{k^2-2}{3} < 0 \Leftrightarrow -3 < k^2 - 2 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2 - 2 < 0 \wedge k^2 - 2 > -3 \Leftrightarrow k^2 - 2 < 0 \wedge k^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow k^2 - 2 < 0$ $\quad$ $\left(k^2 + 1 > 0 \text{ é uma condição universal em } \mathbb{R}\right)$

Cálculo auxiliar:

$k^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow k = -\sqrt{2} \vee k = \sqrt{2}$



$k \in \left]-\sqrt{2}\,,\, \sqrt{2}\right[$

Resposta: (B)

3. $D_f = \mathbb{R}$

$D'_f = ?$

$-1 \le \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{5}\right) \le 1$

$-2 \le 2\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{5}\right) \le 2$

$-3 \le 2\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{5}\right) - 1 \le 1$

$D'_f = [-3\,,\, 1]$

$D'_g = \mathbb{R}$

$D_g = ?$

$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$

$\cos\left(\frac{x}{2}\right) \ne 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \ne \frac{k}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \ne \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{x : x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Resposta: (D)

4. As funções definidas em **(A)** e **(B)** não são pares.

A função definida em **(D)** não tem zeros.

Na opção **(C)**:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$f(x + p) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

$3\cos\left(\frac{x+p}{2}\right) = 3\cos\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow 3\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{p}{2}\right) = 3\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

Como o período da função $\cos x$ é 2π, então $\frac{p}{2} = 2\pi \Leftrightarrow p = 4\pi$.

$f(x) = 3\cos\left(-\frac{x}{2}\right) = 3\cos\left(\frac{x}{2}\right) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

Assim, a função f é par.

Resposta: (C)

5. $\dfrac{\sin 60^\circ}{21}=\dfrac{\sin\alpha}{14}\Leftrightarrow\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{21}=\dfrac{\sin\alpha}{14}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{42}=\dfrac{\sin\alpha}{14}\Leftrightarrow\sin\alpha=\dfrac{14\sqrt{3}}{42}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

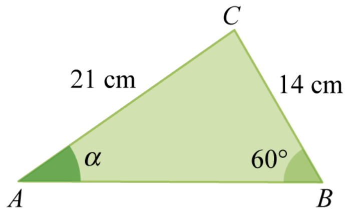
$1+\dfrac{1}{\tan^2\alpha}=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{\tan^2\alpha}=\dfrac{1}{\frac{3}{9}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{\tan^2\alpha}=3\Leftrightarrow\dfrac{1}{\tan^2\alpha}=2\Leftrightarrow\tan^2\alpha=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\tan\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Como α é um ângulo agudo, então $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Resposta: (B)



Grupo II

1. $3\cos\left[\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]-\left[\sin\left(\arctan(-1)\right)\right]^2=$

$=3\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-\left[\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^2=3\times\dfrac{1}{2}-\left[-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^2=$

$=\dfrac{3}{2}-\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{4}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{2}=1$

2.1. $f(x)=2\cos\left(-x-\dfrac{13}{2}\pi\right)+\sin(7\pi-x)+\tan(x-3\pi)=$

$=2\cos\left(-x-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin(\pi-x)+\tan(x-\pi)=$

$=2(-\sin x)+\sin x+\tan x=$

$=-2\sin x+\sin x+\tan x=$

$=-\sin x+\tan x$

2.2. $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{3}{5}\Leftrightarrow-\cos x=\dfrac{3}{5}\Leftrightarrow\cos x=-\dfrac{3}{5}$

$x\in 3.^\text{o}\text{ Q}$

$\sin^2 x+\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2=1\Leftrightarrow\sin^2 x+\dfrac{9}{25}=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin^2 x=1-\dfrac{9}{25}\Leftrightarrow\sin^2 x=\dfrac{16}{25}\Leftrightarrow\sin x=\pm\dfrac{4}{5}$

Como $x\in 3.^\text{o}\text{ Q}$, então $\sin x=-\dfrac{4}{5}$.

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4}{3}$

$f(x) = -\left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{4}{3} = \underset{(\times 3)}{\frac{4}{5}} + \underset{(\times 5)}{\frac{4}{3}} = \frac{12}{15} + \frac{20}{15} = \frac{32}{15}$

3. Seja x a medida do comprimento do lado do quadrado.

$\overline{DE}^2 = x^2 + \left(\frac{2}{3}x\right)^2 \Leftrightarrow \overline{DE}^2 = x^2 + \frac{4}{9}x^2 \Leftrightarrow \overline{DE}^2 = \frac{13}{9}x^2 \underset{\underset{DE>0}{\uparrow}}{\Leftrightarrow} \overline{DE} = \frac{x\sqrt{13}}{3}$

$\sin\alpha = \frac{\frac{2}{\cancel{3}}\cancel{x}}{\frac{\cancel{x}\sqrt{13}}{\cancel{3}}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

$\cos\alpha = \frac{\cancel{x}}{\frac{\cancel{x}\sqrt{13}}{3}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

$5\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{10\sqrt{13}}{13} + \frac{3\sqrt{13}}{13} = \frac{13\sqrt{13}}{13} = \sqrt{13}$

4.1. $4\cos x + 2\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

4.2. $\tan x = -\tan\left(\frac{3}{8}\pi\right) \Leftrightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{3}{8}\pi\right) \Leftrightarrow x = -\frac{3}{8}\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

4.3. $2\sin^2 x - 3\sin x = 2 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{9+16}}{4} \Leftrightarrow \sin x = \frac{3 \pm 5}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x = 2 \vee \sin x = -\frac{1}{2}$

Equação impossível porque $-1 \leq \sin x \leq 1$

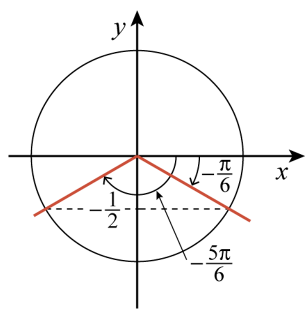
$\Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$k = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{6} \vee x = \cancel{\frac{7}{6}\pi}$

$k = 1 \rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k = \cancel{\frac{11}{6}\pi}$

$k = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} - 2\pi = -\cancel{\frac{13}{6}}\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi - 2\pi = -\frac{5}{6}\pi$

$S = \left\{-\frac{5}{6}\pi,\ -\frac{\pi}{6}\right\}$



5.1. $T(6) = 18 + 8\sin\left[\frac{(6-8)\pi}{12}\right] = 18 + 8\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 18 + 8\left(-\frac{1}{2}\right) = 18 - 4 = 14\ °\text{C}$

Resposta: A temperatura do ar é de 14 ºC.

5.2. $-1 \le \sin\left[\frac{(x-8)\pi}{12}\right] \le 1$

$-8 \le 8\sin\frac{\left[(x-8)\pi\right]}{12} \le 8$

$10 \le 18 + 8\sin\left[\frac{(x-8)\pi}{12}\right] \le 26$

$D'_f = [10\,,\,26]$

Resposta: A temperatura máxima atingida foi de 26 ºC.

5.3. $T(x) = 18 \Leftrightarrow \cancel{18} + 8\sin\left[\frac{(x-8)\pi}{12}\right] = \cancel{18} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\left[\frac{(x-8)\pi}{12}\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-8)\pi}{12} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-8)\cancel{\pi} = 12k\cancel{\pi},\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 8 + 12k,\ k \in \mathbb{Z}$

$k = 0 \to x = 8$

$k = 1 \to x = 20$

$k = 2 \to \cancel{x = 32}$

$k = -1 \to \cancel{x = -4}$

Resposta: Às 8 h e às 20 h.

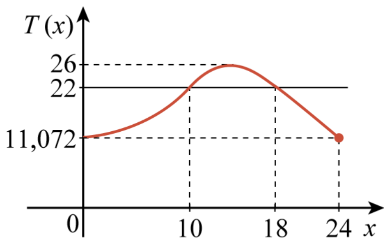
5.4. Janela de visualização:

$0 \le x \le 24$

$0 \le y \le 30$

$18 - 10 = 8\text{ h}$

Resposta: Durante 8 horas.



6. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{\underset{(\times3)}{2}} \times \frac{x}{2} + \frac{\pi}{\underset{(\times2)}{3}}\right) \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{5}{6}\pi - \frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{6}\pi - \frac{x}{2} + 2k\pi \vee 2x + \frac{\pi}{4} = \pi - \left(\frac{5}{6}\pi - \frac{x}{2}\right) + 2k\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x + \frac{x}{2} = \frac{5\pi}{\underset{(\times2)}{6}} - \frac{\pi}{\underset{(\times3)}{4}} + 2k\pi \vee 2x - \frac{x}{2} = \underset{(\times12)}{\pi} - \frac{5\pi}{\underset{(\times6)}{6}} - \frac{\pi}{\underset{(\times3)}{4}} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{5}{2}x = \frac{7}{12}\pi + 2k\pi \vee \frac{3}{2}x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{14}{60}\pi + \frac{4}{5}k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{36} + \frac{4k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{7}{30}\pi + \frac{4}{5}k\pi \vee x = -\frac{\pi}{18} + \frac{4}{3}k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$k = 0 \to x = \frac{7}{30}\pi \vee \cancel{x = -\frac{\pi}{18}}$

$k = 1 \to x = \frac{7}{30}\pi + \frac{4}{\underset{(\times6)}{5}}\pi = \cancel{\frac{31}{30}\pi}$

A abcissa do ponto I é $\frac{7}{30}\pi$.

$$f\left(\frac{7}{30}\pi\right) = \sin\left(\underset{(\times 4)}{\frac{7\pi}{15}} + \underset{(\times 15)}{\frac{\pi}{4}}\right) = \sin\left(\frac{43}{60}\pi\right) = 0,7771 \quad \text{(4 c.d.)}$$

$$I\left(\frac{7}{30}\pi\ ;\ 0,7771\right)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 1 \rightarrow x = -\underset{(\times 1)}{\frac{\pi}{8}} + \underset{(\times 4)}{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{8}$$

Assim: $I\left(\frac{7}{30}\pi\ ;0,7771\right)$; $M\left(\frac{3\pi}{8}\ , 0\right)$ e $O(0\ , 0)$.

$$A = \frac{\frac{3}{8}\pi \times 0,7771}{2} \approx 0,46$$

Resposta: A medida da área do triângulo aproximadamente igual a 0,46 u.a.