Proposta de teste de avaliação

Matemática A

11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos **|** **Data:**

CADERNO I (60 minutos – com calculadora)

1. Em $\mathbb{R}$, a equação $\cos(x-\pi)=-\pi$:

(A) admite a solução $x=-\pi$;

(B) admite a solução $x=\pi$;

(C) admite a solução $x=0$;

(D) não admite solução.

2. Num referencial ortonormado Oxy, uma reta r admite a equação $\sqrt{3}x-3y+2=0$.
A inclinação, em radianos, dessa reta é:

(A) $\sqrt{3}$

(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(C) $\dfrac{\pi}{6}$

(D) $\dfrac{\pi}{3}$

3. Seja α o plano de equação:

$$\sqrt{2}x-mz=0$$

e t a reta de equação:

$$\begin{cases} x=4+\lambda \\ y=2 \\ z=-2-3\lambda \end{cases}, \lambda\in\mathbb{R}$$

O valor de m para o qual o plano α é paralelo à reta t é:

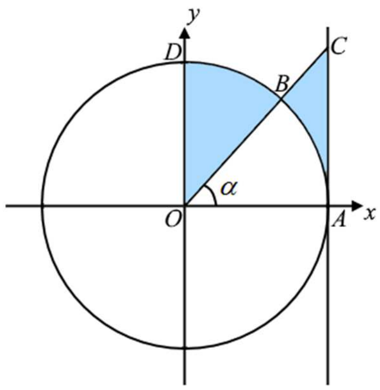
(A) -3

(B) 3

(C) $\sqrt{2}$

(D) $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

4. Na figura está representada, em referencial ortonormado Oxy, a circunferência trigonométrica.
Seja α a amplitude do ângulo AOB, em radianos.



4.1. Mostre que a área sombreada, para cada valor de α, é dada por:

$$A(\alpha)=\frac{1}{4}(\pi-4\alpha+2\tan\alpha)$$

4.2. Calcule $A\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Apresente o resultado arredondado às décimas.

4.3. Seja d a medida da distância de O a C, para cada valor de $\alpha\in\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

4.3.1. Mostre que $d=\frac{1}{\cos\alpha}$.

4.3.2. Determine o valor exato de α para $d=\sqrt{2}$.
Apresente o resultado com denominador racional.

5. Considere um referencial ortonormado $Oxyz$ e seja β o plano de equação $x-3y+2z=5$ e o ponto M de coordenadas $(2,\ -3,\ 1)$.

Determine:

5.1. um ponto do plano β e um vetor normal a esse plano;

5.2. uma equação vetorial da reta r que passa em M e é perpendicular a β;

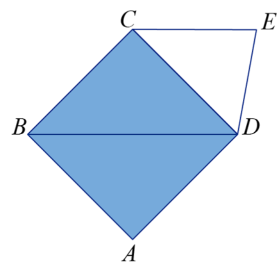
5.3. uma equação do plano γ, paralelo a β que contém o ponto M;

5.4. a equação reduzida da superfície esférica de centro no ponto M que é tangente ao plano β.

6. Considere a figura ao lado, onde:

- $[ABCD]$ é um quadrado de área x;
- $[CDE]$ é um triângulo isósceles e retângulo em E.

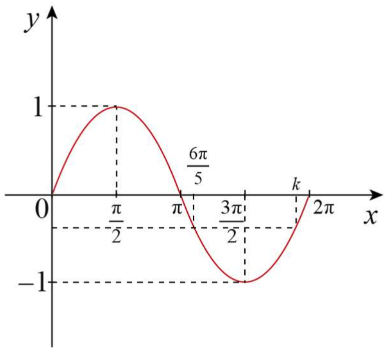
Calcule $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CE}$.



Caderno II (30 min – sem calculadora)

1. Na figura abaixo está a representação gráfica da função g definida por $g(x)=\sin x$, $x\in[0,\ 2\pi[$.

Tal como a figura sugere, $g(k)=g\left(\frac{6}{5}\pi\right)$.



O valor de k é:

(A) $\frac{\pi}{5}$

(B) $\frac{9}{5}\pi$

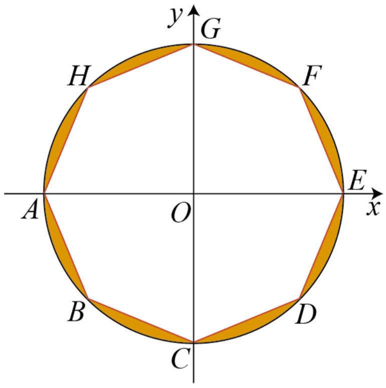
(C) $\frac{7}{10}\pi$

(D) $\frac{17}{10}\pi$

2. Uma equação do plano α que passa no ponto $A(-2,\ -4,\ -6)$ e é perpendicular à reta r definida pela condição $x=-2\wedge z=0$ é:

(A) $x=-2$ **(B)** $y=-4$ **(C)** $z=-6$ **(D)** $z=0$

3. Na figura abaixo está representado, num referencial ortonormado xOy, um octógono regular inscrito numa circunferência de raio 2.



3.1. Determine:

3.1.1. as coordenadas dos vértices do octógono;

3.1.2. a equação reduzida da reta EF ;

3.1.3. uma equação vetorial de uma reta s perpendicular a AC que passe no ponto A;

3.1.4. $\cos\alpha$, sendo α o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{OF}$ e $\overrightarrow{OC}$.

3.2. Calcule o valor exato da área da zona sombreada.

4. Resolva a seguinte equação trigonométrica.

$$\tan^2 x=3,\ x\in\left]\frac{-\pi}{2},\ \pi\right]$$

FIM

Cotações

Caderno I

1.	2.	3.	4.1.	4.2.	4.3.1.	4.3.2.	5.1.	5.2.	5.3.	5.4.	6.	Total
8	8	8	16	10	12	10	6	12	12	18	20	**140**

Caderno II

1.	2.	3.1.1.	3.1.2.	3.1.3.	3.1.4.	3.2.	4.	Total
8	8	8	8	8	4	8	8	**60**

Propostas de resolução

Caderno I

1. $\cos(x-\pi)=-\pi \Leftrightarrow -\cos x=-\pi \Leftrightarrow \cos x=\pi$

$-1\leq \cos x\leq 1,\ \forall x\in \mathbb{R}$

Logo, $\cos x=\pi$ não admite solução uma vez que $\pi>1$.

Resposta: (D)

2. $\sqrt{3}x-3y+2=0 \Leftrightarrow -3y=-\sqrt{3}x-2 \Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2}{3}$

$m=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$m=\tan\theta \Leftrightarrow \tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{6}\text{rad}$

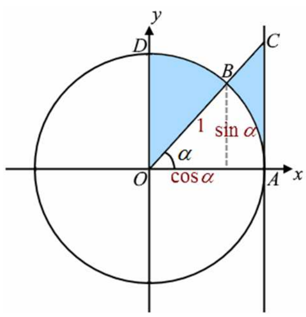
Resposta: (C)

3. Um vetor normal ao plano α tem de coordenadas $\overrightarrow{n_\alpha}\left(\sqrt{2},\ 0,\ -m\right)$ e um vetor diretor da reta t é $\overrightarrow{u_t}(1,\ 0,\ -3)$.

$\alpha // t \Leftrightarrow \overrightarrow{n_\alpha}\perp\overrightarrow{u_t} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_\alpha}\cdot\overrightarrow{u_t}=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2},\ 0,\ -m\right)\cdot(1,\ 0,\ -3)=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}+3m=0 \Leftrightarrow 3m=-\sqrt{2} \Leftrightarrow m=-\frac{\sqrt{2}}{3}$

Resposta: (D)

4.1. Área de um círculo: $A_{\bigcirc}=\pi r^2$



Neste caso, $A_{\bigcirc}=\pi$ u.a.

π —— 2π rad

$A_{\triangle}$ —— α rad

$A_{\triangle}=\frac{\pi\alpha}{2\pi}=\frac{\alpha}{2}$

A área do setor circular BOD é $\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$.

A área do triângulo $[OAC]$ é $\frac{1\times\tan\alpha}{2}=\frac{\tan\alpha}{2}$.

$$A_{\text{sombreada}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\tan\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} - \alpha + \frac{\tan\alpha}{2} = \frac{1}{4}(\pi - 4\alpha + 2\tan\alpha) = A(\alpha)$$

4.2. $A\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}\left(\pi - \frac{4}{3}\pi + 2\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(-\frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,6$ u.a.

4.3.1. $\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \cos\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\overline{OC}} = \cos\alpha \Leftrightarrow \overline{OC} = \frac{1}{\cos\alpha}$

4.3.2. $\frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \underset{\alpha \in \left]0,\, \frac{\pi}{2}\right[}{\Leftrightarrow} \alpha = \frac{\pi}{4}$

5.1. $P_\beta(1,\ 0,\ 2)$, por exemplo

$\vec{n}_\beta = (1,\ -3,\ 2)$, por exemplo

5.2. $\vec{u}_r = \vec{n}_\beta = (1,\ -3,\ 2)$

$r:\ (x,\ y,\ z) = (2,\ -3,\ 1) + k(1,\ -3,\ 2),\ k \in \mathbb{R}$

5.3. $\beta \,//\, \lambda \Leftrightarrow \overrightarrow{n_\beta} = k \cdot \overrightarrow{n_\gamma}$

Para $k = 1$: $\vec{n}_\beta = \vec{n}_\lambda = (1,\ -3,\ 2)$

$x - 3y + 2z + d = 0$

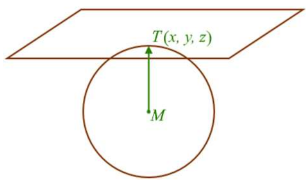
$M \in \lambda:\ 2 + 9 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -13$

$\lambda:\ x - 3y + 2z - 13 = 0$

5.4. Seja T o ponto de tangente do plano com a superfície esférica.

Vamos determinar as coordenadas de um ponto de tangência.

O ponto T é o ponto de interseção com o plano β da reta que passa em M e é perpendicular ao plano β .



Uma equação da reta MT é:

$(x,\ y,\ z) = (2,\ -3,\ 1) + k(1,\ -3,\ 2),\ k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = 2 + k \\ y = -3 - 3k,\ k \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 2k \end{cases}$$

Como o ponto T pertence ao plano β :

$$2 + k - 3(-3 - 3k) + 2(1 + 2k) = 5 \Leftrightarrow 2 + k + 9 + 9k + 2 + 4k = 5 \Leftrightarrow 14k = -8 \Leftrightarrow k = -\frac{4}{7}$$

$T\left(2 - \frac{4}{7},\ -3 + \frac{12}{7},\ 1 - \frac{8}{7}\right)$, ou seja, $T\left(\frac{10}{7},\ -\frac{9}{7},\ -\frac{1}{7}\right)$.

$r = \left\|\overrightarrow{MT}\right\| = ?$

$$\overrightarrow{MT} = T - M = \left(\frac{10}{7},\ -\frac{9}{7},\ -\frac{1}{7}\right) - (2,\ -3,\ 1) = \left(-\frac{4}{7},\ \frac{12}{7},\ -\frac{8}{7}\right)$$

$$r = \left\|\overrightarrow{MT}\right\| = \frac{\sqrt{16 + 144 + 64}}{7} = \frac{\sqrt{224}}{7}$$

A equação da superfície esférica é $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=\frac{224}{49}$, ou seja:

$$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=\frac{32}{7}$$

6. $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\sqrt{2x}\times\sqrt{x}\times\cos 45°=\sqrt{2x}\times\sqrt{x}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=x$

$\overline{DB}^2=\overline{AB}^2+\overline{AB}^2\Leftrightarrow\overline{DB}^2=2\overline{AB}^2\Leftrightarrow\overline{DB}^2=2x\Leftrightarrow\overline{DB}=\sqrt{2x}$

$\overline{CE}^2+\overline{ED}^2=\overline{CD}^2\Leftrightarrow\overline{CE}^2+\overline{CE}^2=x\Leftrightarrow 2\overline{CE}^2=x\Leftrightarrow\overline{CE}^2=\frac{x}{2}\underset{\overline{CE}>0}{\Leftrightarrow}\overline{CE}=\frac{\sqrt{2x}}{2}$

$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CE}=\sqrt{2x}\times\frac{\sqrt{2x}}{2}\times\cos 180°=-x$

Portanto, $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CE}=x-(-x)=2x$.

Caderno II

1. $\frac{6}{5}\pi-\pi=\frac{\pi}{5}$

$2\pi-k=\frac{\pi}{5}\Leftrightarrow k=\frac{9}{5}\pi$

Resposta: (B)

2. Um vetor normal ao plano α é colinear com o vetor diretor da reta dada.

Então, $\vec{n}=\vec{u_r}=(0,\ 1,\ 0)$.

A equação do plano α é $y+d=0$.

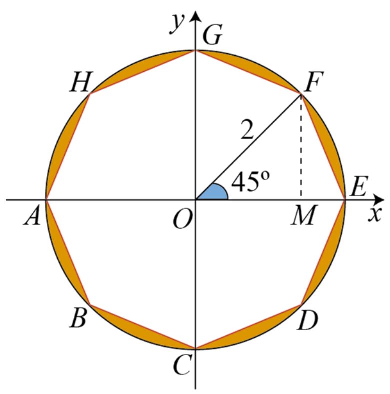
Como o ponto A pertence ao plano α, então:

$-4+d=0\Leftrightarrow d=4$

Então, a equação do plano α é: $y+4=0\Leftrightarrow y=-4$

Resposta: (B)

3.1.1. $360°:8=45°$



$\cos 45°=\frac{\overline{OM}}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\overline{OM}}{2}\Leftrightarrow\overline{OM}=\sqrt{2}$

$\sin 45°=\frac{\overline{MF}}{2}=\overline{MF}=\sqrt{2}$

$A(-2,\ 0)$, $B\left(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\right)$, $C(0,\ -2)$, $D\left(\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\right)$,

$E(2,\ 0)$, $F\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$, $G(0,\ 2)$ e $H\left(-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$

3.1.2. $\overrightarrow{EF}=F-E=\left(\sqrt{2}-2,\ \sqrt{2}\right)$

$$m_{EF}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+2\right)}{2-4}=\frac{2+2\sqrt{2}}{-2}=-1-\sqrt{2}$$

$y=\left(-1-\sqrt{2}\right)x+b$

$E(2,\ 0)$

$0=\left(-1-\sqrt{2}\right)\times 2+b \Leftrightarrow b=2+2\sqrt{2}$

$EF:\ y=\left(-1-\sqrt{2}\right)x+2+2\sqrt{2}$

3.1.3. $\overrightarrow{AC}=C-A=(2,\ -2)$

$m_{AC}=-1$

$m=-\dfrac{1}{m_{AC}}=1$

$\vec{u}(1,\ 1)$, por exemplo.

$s:\ (x,\ y)=(-2,\ 0)+k(1,\ 1),\ k\in\mathbb{R}$

3.1.4. $\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{OC}}{\left\|\overrightarrow{OF}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OC}\right\|}=\dfrac{-2\sqrt{2}}{2\times 2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\overrightarrow{OF}=F-O=\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$; $\overrightarrow{OC}=C-O=(0,\ -2)$

$\left\|\overrightarrow{OF}\right\|=\sqrt{2+2}=2$; $\left\|\overrightarrow{OC}\right\|=2$

$\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{OC}=-2\sqrt{2}$

3.2. $A_{\bigcirc}=\pi r^2$

$A_{\bigcirc}=4\pi$ u.a.

$A_{\triangle}=\dfrac{2\times\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ u.a.

Área sombreada: $A_{\bigcirc}-8\times A_{\triangle}=\left(4\pi-8\sqrt{2}\right)$ u.a.

4. $\tan^2 x=3 \Leftrightarrow \tan x=\pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi$ com $k\in\mathbb{Z}$

$k=-1 \rightarrow \cancel{x=-\dfrac{2\pi}{3}} \vee \cancel{x=-\dfrac{4\pi}{3}}$

$k=0 \rightarrow x=\dfrac{\pi}{3} \vee x=-\dfrac{\pi}{3}$

$k=1 \rightarrow \cancel{x=\dfrac{4\pi}{3}} \vee \cancel{x=\dfrac{2\pi}{3}}$

$k=2 \rightarrow \cancel{x=\dfrac{7\pi}{3}} \vee \cancel{x=\dfrac{5\pi}{3}}$

O conjunto-solução é:

$S=\left\{-\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2\pi}{3}\right\}$