Proposta de teste de avaliação

Matemática A

11.º ANO DE ESCOLARIDADE

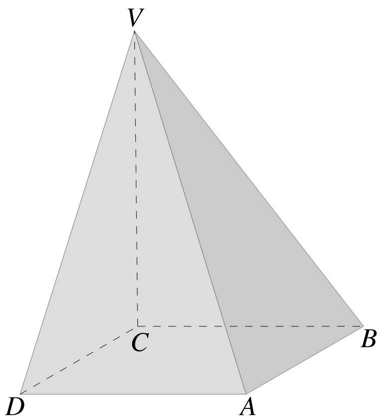
Duração: 90 minutos | **Data:**

Caderno 1

(é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

1. Fixado um referencial ortonormado do espaço considere a pirâmide de vértice V cuja base é o quadrado $[ABCD]$.



Sabe-se que:

- os pontos V e C têm coordenadas $(5, 8, 3)$ e $(1, 2, -4)$, respetivamente;
- o ponto A pertence à reta definida pela condição $x = -1 \wedge y = 0$;
- a base da pirâmide está contida no plano α de equação $2x + 2y + z - 2 = 0$.

1.1. Mostre que o ponto A tem coordenadas $(-1, 0, 4)$.

1.2. Determine a amplitude do ângulo AVC.

Apresente o resultado em graus arredondado às unidades.

1.3. Determine uma equação vetorial de uma reta r que passa no vértice V e é perpendicular à base.

1.4. Mostre que a medida da altura da pirâmide é igual a 9 unidades de comprimento.

1.5. Determine a medida do volume da pirâmide.

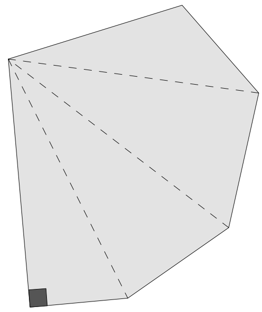
1.6. Sabe-se que o ponto B tem coordenadas $(k, 1-k, 0)$ e que $\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{AB} = 12$.

A abcissa do ponto B é:

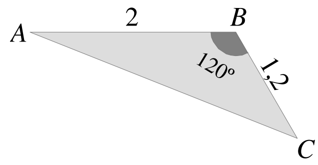
(A) 3 **(B)** –3 **(C)** 2 (D) –2

2. As medidas de amplitude dos ângulos internos de um hexágono convexo estão em progressão aritmética. Sabendo que a medida da amplitude do menor ângulo é 90º, determine a medida da amplitude do maior ângulo.

[Recorde que a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um polígono de n lados, em graus, é igual a $(n-2)\times 180$.]



3. No triângulo $[ABC]$ da figura, $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=1{,}2$ e $A\hat{B}C=120º$.



A medida do comprimento do lado $[AC]$ é igual a:

(A) $2{,}5$ **(B)** $2{,}8$ **(C)** 3 **(D)** $3{,}8$

Fim do caderno 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item								
Cotação (em pontos)								
1.1.	**1.2.**	**1.3.**	**1.4.**	**1.5**	**1.6.**	**2**	**3.**	
10	15	10	15	15	10	15	10	**100**

Caderno 2

(não é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

4. De uma sucessão (u_n) sabe-se que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n \times \frac{1}{2}$.

O limite de (u_n) é igual a:

(A) 0 **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $-\infty$ **(D)** $+\infty$

5. Considere as sucessões (u_n) e (v_n) definidas por:

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{4+u_n}{3}, n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{e} \quad v_n = u_n - 2$$

5.1. Prove, por indução matemática, que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^{2-n} + 2$.

5.2. Mostre que (v_n) é uma progressão geométrica.

5.3. Seja S_n a soma dos n primeiros termos de (v_n).

O valor de $\lim S_n$ é:

(A) $\frac{10}{3}$ **(B)** $\frac{9}{2}$ **(C)** $\frac{9}{4}$ **(D)** $+\infty$

6. De uma sucessão (u_n) sabe-se que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{2}{2n-3}$.

6.1. O que pode afirmar quanto à monotonia de (u_n)? Justifique.

6.2. Se $u_1 = a$, então u_3 é igual a:

(A) $a-2$ **(B)** $a+2$ **(C)** a **(D)** $a+\frac{2}{3}$

7. Calcule o limite das sucessões cujo termo geral se indica, identificando as indeterminações encontradas.

7.1. $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+3n}-3n}{2n+1}$

7.2. $v_n = \dfrac{2^{2n+1}+\cos n}{4^{n+1}+\pi^n}$

Fim da prova

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item								
Cotação (em pontos)								
4	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.1.**	**7.2.**	**Total**
10	15	15	10	10	10	15	15	**100**
TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)								**200**

Proposta de resolução

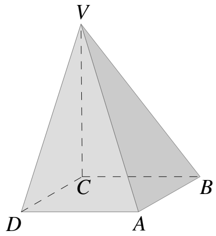
Caderno 1

1. $V(5, 8, 3)$ e $C(1, 2, -4)$

1.1. Dado que o ponto A pertence à reta definida pela condição $x=-1 \wedge y=0$, tem-se $A(-1, 0, c)$.

Como $A \in \alpha$: $2x+2y+z-2=0$, vem $2\times(-1)+2\times 0+c-2=0 \Leftrightarrow -2+c-2=0 \Leftrightarrow c=4$

Logo, $A(-1, 0, 4)$.



1.2. $A(-1, 0, 4)$, $V(5, 8, 3)$ e $C(1, 2, -4)$

$\overrightarrow{VA} = A - V = (-1, 0, 4)-(5, 8, 3)=(-6, -8, 1)$

$\overrightarrow{VC} = C - V = (1, 2, -4)-(5, 8, 3)=(-4, -6, -7)$

$$\cos\left(A\hat{V}C\right)=\cos\left(\widehat{\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VC}}\right)=\frac{\overrightarrow{VA}\cdot\overrightarrow{VC}}{\left\|\overrightarrow{VA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{VC}\right\|}=$$

$$=\frac{(-6, -8, 1)\cdot(-4, -6, -7)}{\left\|(-6, -8, 1)\right\|\times\left\|(-4, -6, -7)\right\|}=\frac{24+48-7}{\sqrt{36+64+1}\times\sqrt{16+36+49}}=$$

$$=\frac{65}{\sqrt{101}\times\sqrt{101}}=\frac{65}{101}$$

Se $\cos\left(A\hat{V}C\right)=\dfrac{65}{101}$, então $A\hat{V}C \approx 50^{\circ}$.

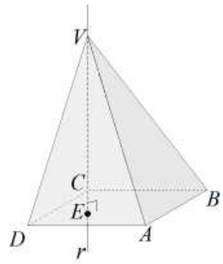
1.3. O vetor $\vec{u}(2, 2, 1)$ é perpendicular ao plano da base definido por $2x+2y+z-2=0$.

Logo, o vetor $\vec{u}$ é um vetor diretor da reta r. Como $V(5, 8, 3)$, uma equação vetorial da reta r é $(x, y, z)=(5, 8, 3)+k(2, 2, 1),\ k\in\mathbb{R}$.

1.4. A medida da altura da pirâmide é igual a $\left\|\overrightarrow{VE}\right\|$, sendo E o ponto de interseção da reta r com o plano α.

$(x, y, z)=(5, 8, 3)+k(2, 2, 1),\ k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=5+2k \wedge y=8+2k \wedge z=3+k,\ k\in\mathbb{R}$



Logo, qualquer ponto da reta r é da forma: $(5+2k, 8+2k, 3+k),\ k\in\mathbb{R}$

O ponto E é o ponto da reta r que pertence ao plano α. Então, as suas coordenadas satisfazem a equação $2x+2y+z-2=0$, ou seja:

$2(5+2k)+2(8+2k)+(3+k)-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10+4k+16+4k+3+k-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9k=-27 \Leftrightarrow k=-3$

Portanto, o ponto E tem coordenadas:

$(5+2\times(-3), 8+2\times(-3), 3-3)=(-1, 2, 0)$

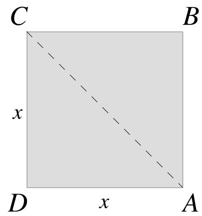
$\overrightarrow{VE}=E-V=(-1, 2, 0)-(5, 8, 3)=(-6, -6, -3)$

$\left\|\overrightarrow{VE}\right\|=\sqrt{(-6)^2+(-6)^2+(-3)^2}=\sqrt{36+36+9}=\sqrt{81}=9$

A altura da pirâmide é igual a 9 unidades de comprimento.

1.5. $V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times \text{altura}$

A base da pirâmide é um quadrado de lado x e medida da diagonal igual a $\|\overrightarrow{AC}\|$.



$A(-1, 0, 4)$ e $C(1, 2, -4)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (1, 2, -4) - (-1, 0, 4) = (2, 2, -8)$

$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-8)^2} = \sqrt{72}$

$x^2 + x^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2$

$2x^2 = \left(\sqrt{72}\right)^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 72 \Leftrightarrow x^2 = 36$

Área da base $= 36$ u.a.

$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times 36 \times 9 = 108$ u.v.

1.6. $A(-1, 0, 4)$, $B(k, 1-k, 0)$ e $V(5, 8, 3)$

$\overrightarrow{AV} = -\overrightarrow{VA} = -(-6, -8, 1) = (6, 8, -1)$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (k, 1-k, 0) - (-1, 0, 4) = (k+1, 1-k, -4)$

$\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{AB} = 12 \Leftrightarrow (6, 8, -1).(k+1, 1-k, -4) = 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6k + 6 + 8 - 8k + 4 = 12 \Leftrightarrow -2k = -6 \Leftrightarrow k = 3$

A abcissa do ponto B é k, ou seja, é igual a 3.

Resposta: (A)

2. Sejam α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_6$ as amplitudes, em graus, dos ângulos internos do hexágono.

$\alpha_1 = 90°$

$\alpha_6 = \alpha_1 + 5r$, sendo r a razão da progressão aritmética.

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = (6-2) \times 180$, em graus

$\Leftrightarrow \frac{\alpha_1 + \alpha_6}{2} \times 6 = 720 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha_1 + \alpha_1 + 5r) \times 3 = 720 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\alpha_1 + 5r = \frac{720}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \times 90 + 5r = 240 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5r = 240 - 180 \Leftrightarrow$

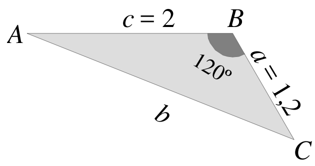
$\Leftrightarrow r = \frac{60}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r = 12$

$\alpha_6 = \alpha_1 + 5r = 90 + 5 \times 12 = 150$

A medida da amplitude do maior ângulo é 150º.

3. Pelo Teorema de Carnot, temos:



$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$b^2 = 1,2^2 + 2^2 - 2\times 1,2\times 2\times \cos 120º \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^2 = 1,44 + 4 - 4,8\times\cos(180º - 60º) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^2 = 5,44 + 4,8\times\cos 60º \Leftrightarrow b^2 = 5,44 + 4,8\times\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^2 = 5,44 + 2,4 \Leftrightarrow b^2 = 7,84$

Logo, $b = \sqrt{7,84} = 2,8$

Resposta: (B)

Caderno 2

4. Se $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times \frac{1}{2}$, (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

Portanto, $\lim u_n = \lim\left[u_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] = \lim\left[u_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right] = 2u_1 \times 0 = 0$

Resposta: (A)

5. $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{4+u_n}{3}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$ e $v_n = u_n - 2$

5.1. Pretendemos provar que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^{2-n} + 2$

- Para $n = 1$, temos

  $u_1 = 3^{2-1} + 2 \Leftrightarrow 5 = 3 + 2 \Leftrightarrow 5 = 5$, que é uma proposição verdadeira.

- Admitindo, para dado $n \in \mathbb{N}$, que $u_n = 3^{2-n} + 2$, temos de provar que $u_{n+1} = 3^{2-(n+1)} + 2$.

  $u_{n+1} = \frac{4+u_n}{3} =$

  $= \frac{4 + \left(3^{2-n} + 2\right)}{3} =$ (por hipótese)

  $= \frac{3^{2-n} + 6}{3} = \frac{3^{2-n}}{3} + \frac{6}{3} =$

  $= 3^{2-n-1} + 2 = 3^{2-(n+1)} + 2$

  Fica, assim, provada a hereditariedade da propriedade.

Pelo princípio de indução matemática, pode-se concluir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^{2-n} + 2$.

5.2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2 = 3^{2-n} + 2 - 2 = 3^{2-n}$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3^{2-(n+1)}}{3^{2-n}} = \frac{3^{2-n-1}}{3^{2-n}} = 3^{1-n-(2-n)} = 3^{1-n-2+n} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

Como $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{3}$, (v_n) é uma progressão geométrica de razão $r = \frac{1}{3}$.

5.3. $S_n = v_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$, $v_1 = 3^{2-1} = 3$ e $r = \frac{1}{3}$

$$\lim S_n = \lim\left[3\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\right] = 3\times\frac{1-\lim\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} = 3\times\frac{1-0}{\frac{2}{3}} = 3\times\frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

Resposta: (B)

6. **6.1.** $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{2}{2n-3} \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{2}{2n-3}$

$$\frac{2}{2n-3} > 0 \Leftrightarrow 2n-3>0 \Leftrightarrow n > \frac{3}{2} \overset{n\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow} n\geq 2$$

Logo, a sucessão (u_n) não é monótona, pois:

- para $n=1$, $u_2 - u_1 = \frac{2}{2\times1-3} = -2 < 0$
- para $n=2$, $u_3 - u_2 = \frac{2}{2\times2-3} = 2 > 0$

ou seja, $u_2 < u_1$ e $u_3 > u_2$.

6.2. $u_1 = a$

$$u_2 = u_1 + \frac{2}{2\times1-3} = a + \frac{2}{-1} = a-2$$

$$u_3 = u_2 + \frac{2}{2\times2-3} = a-2+2 = a$$

Resposta: (C)

7. **7.1.** $$\lim u_n = \lim\frac{\sqrt{n^2+3n}-3n}{2n+1} \overset{\left(\frac{\infty-\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\frac{\sqrt{n^2\left(1+\frac{3}{n}\right)}-3n}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \lim\frac{n\sqrt{1+\frac{3}{n}}-3n}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \lim\frac{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}-3\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \lim\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}-3}{2+\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{1+0}-3}{2+0} = \frac{1-3}{2} = -1$$

7.2. $$\lim v_n = \lim\frac{2^{2n+1}+\cos n}{4^{n+1}+\pi^n} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\frac{\left(2^2\right)^n\times2+\cos n}{4^n\times4+\pi^n} = \lim\frac{4^n\times2+\cos n}{4^n\times4+\pi^n} =$$

$$= \lim\frac{\frac{4^n\times2}{4^n}+\frac{\cos n}{4^n}}{\frac{4^n\times4}{4^n}+\frac{\pi^n}{4^n}} = \lim\frac{2+\cos n\times\frac{1}{4^n}}{4+\left(\frac{\pi}{4}\right)^n} = \frac{2+0}{4+0} = \frac{1}{2}$$

dado que $\lim\left(\cos n\times\frac{1}{4^n}\right) = 0$ por ser o produto de uma sucessão limitada por uma sucessão de limite nulo e $\lim\left(\frac{\pi}{4}\right)^n = 0$ porque $0 < \frac{\pi}{4} < 1$.