Proposta de teste de avaliação

Matemática A

11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

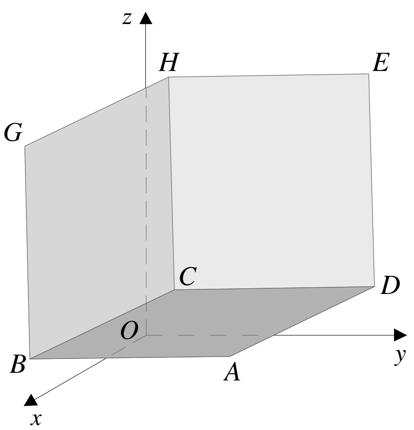
Caderno 1

(é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

---

1. Na figura está representado, num referencial ortonormado $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$ (o ponto F não está representado na figura).



Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(2, 4, 0)$;
- o vetor $\overrightarrow{BC}$ tem coordenadas $(2, 6, 3)$.

1.1. Mostre que o ponto D tem coordenadas $(4, 10, 3)$.

1.2. Determine a amplitude do ângulo OAD.

Apresente o resultado em graus arredondado às unidades.

1.3. Determine uma equação da superfície esférica de centro no ponto A que passa no ponto C.

1.4. Escreva uma equação do plano ABG.

1.5. Sabe-se que a equação $3x + 2y - 6z + 35 = 0$ define o plano GHE.

Determine as coordenadas do ponto F.

2. De uma progressão geométrica monótona (u_n) sabe-se que $u_5 = 256$ e $u_{13} = \frac{1}{256}$.

2.1. Determine uma expressão do termo geral de (u_n).

2.2. Determine a soma dos nove primeiros termos de u_n.

3. Fixado um referencial ortonormado do plano considere os pontos A e B.

Sendo M o ponto médio de $[AB]$, o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano tais que $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ é:

(A) a circunferência de diâmetro $[AB]$;

(B) a mediatriz do segmento de reta $[AB]$;

(C) a reta tangente à circunferência de centro A e raio $[AM]$;

(D) a reta perpendicular a AB no ponto A.

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item								
Cotação (em pontos)								
1.1.	**1.2.**	**1.3.**	**1.4.**	**1.5.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	
15	15	15	15	15	15	15	10	**115**

Caderno 2

(não é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

4. Fixado um referencial ortonormado xOy, considere a reta r de equação $2y+4\sqrt{2}x=1$.

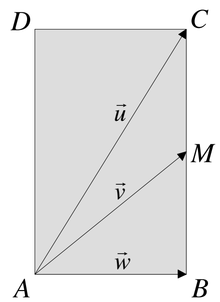
Se α é a inclinação da reta r, então $\cos\alpha$ é igual a:

(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $-\frac{1}{3}$

(C) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **(D)** $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

5. Na figura está representado o retângulo $[ABCD]$ em que M é o ponto médio do lado $[BC]$.

Sejam $\vec{u}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AM}$ e $\vec{w}=\overrightarrow{AB}$.



Então, pode afirmar-se que:

(A) $\vec{u}\cdot\vec{w}=\vec{v}\cdot\vec{w}$ **(B)** $\vec{u}\cdot\vec{w}=2\,\vec{v}\cdot\vec{w}$

(C) $\vec{u}\cdot\vec{w}=\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{w}$ **(D)** $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{w}$

6. Num referencial ortonormado $Oxyz$ e para determinado $m\in\mathbb{R}$, a reta r de equação $(x,y,z)=(m,1,-1)+k(1,m,-1),\ k\in\mathbb{R}$ é paralela ao plano α definido pela condição $2x+4y-mz+1=0$.

O valor de m é:

(A) $-\frac{4}{3}$ **(B)** $-\frac{2}{5}$

(C) 2 **(D)** -2

7. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \dfrac{1-3n}{n+2}$.

7.1. Verifique se $-\dfrac{5}{3}$ é um termo de (u_n).

7.2. Estude (u_n) quanto à monotonia.

8. Seja (a_n) uma sucessão tal que:

$$\begin{cases} a_{50} = 100 \\ a_{n+1} = a_n - 2, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

O termo de ordem 100 é:

(A) 300 **(B)** 200

(C) 0 **(D)** -100

9. De uma sucessão (v_n) sabe-se que:

- $v_1 = 1$;
- (v_n) é monótona crescente;
- para todo o número natural n, $\dfrac{v_n - 1}{v_n} < \dfrac{1}{2}$.

Justifique que a sucessão (v_n) é limitada.

Fim da prova

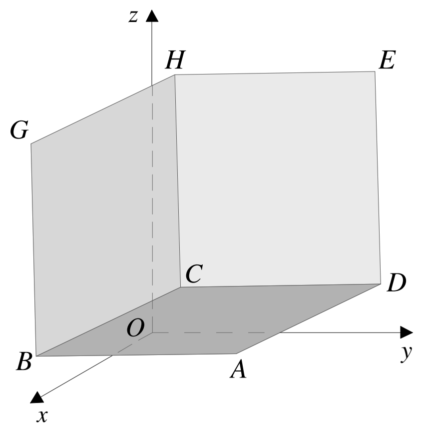
COTAÇÕES (Caderno 2)

Item							
Cotação (em pontos)							
4.	**5.**	**6.**	**7.1.**	**7.2.**	**8.**	**9.**	
10	10	10	15	15	10	15	**85**
TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)							**200**

Proposta de resolução

Caderno 1

1. $A(2,4,0)$ e $\overrightarrow{BC}(2,6,3)$



1.1. Como $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, temos:

$$D = A+\overrightarrow{AD} = A+\overrightarrow{BC} = (2,4,0)+(2,6,3)=(4,10,3)$$

Portanto, o ponto D tem coordenadas $(4,10,3)$.

1.2. $\overrightarrow{AO}=O-A=(0,0,0)-(2,4,0)=(-2,-4,0)$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=(2,6,3)$

$$\cos\left(O\hat{A}D\right)=\cos\left(\overrightarrow{AO}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left\|\overrightarrow{AO}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AD}\right\|}=$$

$$=\frac{(-2,-4,0)\cdot(2,6,3)}{\left\|(-2,-4,0)\right\|\times\left\|(2,6,3)\right\|}=$$

$$=\frac{-4-24+0}{\sqrt{4+16+0}\times\sqrt{4+36+9}}=$$

$$=\frac{-28}{\sqrt{20}\times\sqrt{49}}=\frac{-28}{\sqrt{20}\times 7}=-\frac{4}{\sqrt{20}}$$

Se $\cos\left(O\hat{A}D\right)=-\dfrac{4}{\sqrt{20}}$, então $O\hat{A}D\approx 153^\circ$.

1.3. Centro: $A(2,4,0)$

Raio: $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|$

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|(2,6,3)\right\|=\sqrt{4+36+9}=7$$

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2=7^2+7^2 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2=49+49 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2=98$$

Equação da superfície esférica:

$$(x-2)^2+(y-4)^2+z^2=98$$

1.4. O vetor $\overrightarrow{BC}(2,6,3)$ é perpendicular ao plano ABG. Logo, uma equação do plano ABG é da forma $2x+6y+3z+d=0$.

Como o ponto A tem coordenadas $(2,4,0)$ e pertence ao plano ABG, tem-se:

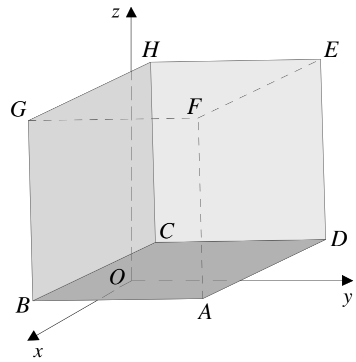
$$2\times 2+6\times 4+3\times 0+d=0 \Leftrightarrow 4+24+d=0 \Leftrightarrow d=-28$$

Uma equação do plano ABG é $2x+6y+3z-28=0$.

1.5. $GHE: \ 3x+2y-6z+35=0$

O ponto F é o ponto de interseção da reta AF com o plano GHE.

Como a reta AF é perpendicular ao plano GHE, definido por $3x+2y-6z+35=0$, uma equação vetorial desta reta é:



$(x, y, z)=(2, 4, 0)+k(3, 2, -6), \ k\in\mathbb{R}$

$(x, y, z)=(2, 4, 0)+k(3, 2, -6), \ k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2+3k \wedge y=4+2k \wedge z=-6k, \ k\in\mathbb{R}$

Qualquer ponto da reta AF é da forma:

$(2+3k, 4+2k, -6k), \ k\in\mathbb{R}$

O ponto F é o ponto da reta AF que pertence ao plano GHE. Logo, as suas coordenadas satisfazem a equação $3x+2y-6z+35=0$, ou seja:

$3\times(2+3k)+2\times(4+2k)-6\times(-6k)+35=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6+9k+8+4k+36k+35=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 49k+49=0 \Leftrightarrow k=-1$

Portanto, o ponto F tem coordenadas $\left(2+3\times(-1), 4+2\times(-1), -6\times(-1)\right)=(-1, 2, 6)$

2. $u_5=256$ e $u_{13}=\dfrac{1}{256}$

2.1. $u_n=u_k\times r^{n-k}$

Para $n=13$ e $k=5$, temos:

$u_{13}=u_5\times r^{13-5}$

$$\frac{1}{256}=256\times r^8 \Leftrightarrow r^8=\frac{1}{256^2} \Leftrightarrow \left(r^4\right)^2=\left(\frac{1}{256}\right)^2 \Leftrightarrow r^4=\frac{1}{256}$$

Como a sucessão é monótona, temos $r>0$, pelo que $r=\sqrt[4]{\dfrac{1}{256}}=\dfrac{1}{4}$.

$$u_n=u_5\times r^{n-5} \Leftrightarrow u_n=256\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-5} \Leftrightarrow u_n=4^4\times 4^{5-n} \Leftrightarrow u_n=4^{9-n}$$

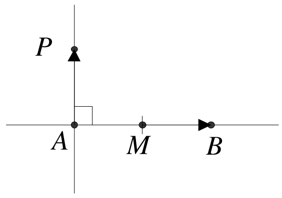
$u_n=4^{9-n}$

2.2. $$\sum_{k=1}^{9}u_k=u_1\times\frac{1-r^9}{1-r}=4^8\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^9}{1-\frac{1}{4}}=4^8\times\frac{1-\frac{1}{4^9}}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\times 4^8\times\left(1-\frac{1}{4^9}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\times 4^9\times\left(1-\frac{1}{4^9}\right)=\frac{1}{3}\times\left(4^9-1\right)=87\,381$$

3. O lugar geométrico dos pontos $P(x\,,\,y)$ do plano tais que $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ é a reta perpendicular a AB no ponto A.

Resposta: **(D)**



Caderno 2

4. $2y+4\sqrt{2}x=1 \Leftrightarrow 2y=-4\sqrt{2}x+1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y=-2\sqrt{2}x+\frac{1}{2}$$

O declive da reta r é igual a $-2\sqrt{2}$. Logo, $\tan\alpha=-2\sqrt{2}$.

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1+\left(-2\sqrt{2}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+8=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow \cos^2\alpha=\frac{1}{9}$$

Como $\tan\alpha<0\,,\,\alpha\in\left]\frac{\pi}{2}\,,\,\pi\right[$, pelo que $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{1}{9}}=-\frac{1}{3}$.

Resposta: **(B)**

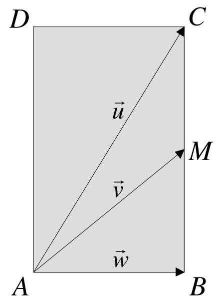
5. O ponto B é a projeção ortogonal dos pontos C e M na reta AB.

Assim:

- $\vec{u}\cdot\vec{w}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overline{AB}\times\overline{AB}$
- $\vec{v}\cdot\vec{w}=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\overline{AB}\times\overline{AB}$

Portanto, $\vec{u}\cdot\vec{w}=\vec{v}\cdot\vec{w}$.

Resposta: **(A)**



6. $r:(x\,,\,y\,,\,z)=(m\,,1\,,-1)+k(1\,,\,m\,,-1)\,,\,k\in\mathbb{R}$

$\alpha:\ 2x+4y-mz+1=0$

O vetor $\vec{r}(1,\,m,-1)$ é um vetor diretor da reta r e o vetor $\vec{u}(2\,,\,4\,,-m)$ é um vetor normal ao plano α.

Como a reta r é paralela ao plano α, o vetor $\vec{r}$ é perpendicular ao vetor $\vec{u}$ e, portanto, $\vec{r}\cdot\vec{u}=0$.

$$\vec{r}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow(1\,,\,m\,,-1)\cdot(2\,,\,4\,,-m)=0\Leftrightarrow 2+4m+m=0\Leftrightarrow 5m=-2\Leftrightarrow m=-\frac{2}{5}$$

Resposta: (B)

7. $u_n = \dfrac{1-3n}{n+2}$

7.1. $u_n = -\dfrac{5}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1-3n}{n+2} = -\dfrac{5}{3} \wedge n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \dfrac{1-3n}{n+2} + \dfrac{5}{3} = 0 \wedge n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{3(1-3n)+5(n+2)}{3(n+2)} = 0 \wedge n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3-9n+5n+10 = 0 \wedge n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4n+13 = 0 \wedge n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{13}{4} \wedge n \in \mathbb{N}$

Como $\dfrac{13}{4} \notin \mathbb{N}$, $-\dfrac{5}{3}$ não é termo de (u_n).

7.2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1-3(n+1)}{(n+1)+2} - \dfrac{1-3n}{n+2} = \dfrac{1-3n-3}{n+3} - \dfrac{1-3n}{n+2} =$

$= \dfrac{-2-3n}{n+3} - \dfrac{1-3n}{n+2} = \dfrac{(n+2)(-2-3n)-(n+3)(1-3n)}{(n+3)(n+2)} =$

$= \dfrac{-2n-3n^2-4-6n-n+3n^2-3+9n}{(n+3)(n+2)} =$

$= \dfrac{-7}{(n+3)(n+2)} < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Como $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$, podemos concluir que (u_n) é monótona decrescente.

8. (a_n) é uma progressão aritmética de razão $r = -2$, sendo $a_{50} = 100$.

$a_n = a_k + (n-k) \times r$

$a_{100} = a_{50} + (100-50) \times (-2) = 100 + 50 \times (-2) = 0$

Resposta: (C)

9. Se (v_n) é monótona crescente, então, para todo o número natural n, tem-se $v_n \geq v_1$. Logo, temos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 1$.

Por outro lado, sendo (v_n) uma sucessão de termos positivos, é válida a equivalência:

$$\dfrac{v_n - 1}{v_n} < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2v_n - 2 < v_n \Leftrightarrow 2v_n - v_n < 2 \Leftrightarrow v_n < 2$$

Como $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq v_n < 2$, podemos concluir que a sucessão (v_n) é limitada.