Proposta de teste de avaliação

Matemática A

11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Caderno 1

(é permitido o uso de calculadora)

Na resposta ao item de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

---

1. Considere as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x)=2-4\sin\left(\frac{x}{3}\right) \quad \text{e} \quad g(x)=2\cos(\pi x+a),\ a\in\mathbb{R}$$

1.1. Prove que f é uma função periódica de período 6π.

1.2. Determine o contradomínio da função f.

1.3. Determine o menor valor positivo de a de forma que $x=2$ seja um zero da função g.

1.4. Considere, agora, $a=0$, ou seja, $g(x)=2\cos(\pi x)$.

Existem pontos P e Q, com a mesma abcissa $x_0\in\left]0,1\right[$, tais que P pertence ao gráfico de f, Q pertence ao gráfico de g e $\overline{PQ}=1$.

Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine x_0.

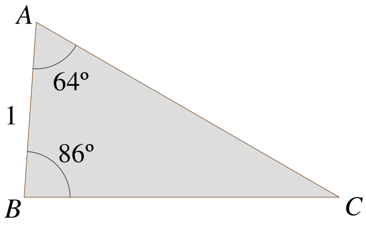
Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), bem como o respetivo referencial;
- indicar x_0, abcissa dos pontos P e Q, com arredondamento às centésimas.

2. Determine o valor de x, com aproximação à centésima do radiano, que verifica a condição:

$$3\sin(2x)+2{,}1=0 \wedge x\in\left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right[$$

3. Considere o triângulo $[ABC]$ em que $\overline{AB} = 1$ cm, $C\hat{B}A = 86º$ e $B\hat{A}C = 64º$.



O perímetro do triângulo $[ABC]$, em centímetros com aproximação às centésimas, é igual a:

(A) $4{,}80$ **(B)** $4{,}79$

(C) $3{,}56$ **(D)** $3{,}30$

Fim do Caderno 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item						
Cotação (em pontos)						
1.1.	**1.2.**	**1.3.**	**1.4.**	**2.**	**3.**	
15	15	15	15	15	10	**85**

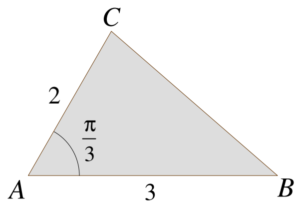
Caderno 2

(não é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

4. Determine $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right[$ tal que $1-2\cos(3x) \geq 0$.

5. Considere o triângulo $[ABC]$ em que $\overline{AB} = 3$ cm, $\overline{AC} = 2$ cm e $B\hat{A}C = \frac{\pi}{3}$ rad.



O comprimento de $[BC]$, em centímetros, é igual a:

(A) $\sqrt{10}$ **(B)** 2,6 **(C)** $\sqrt{7}$ **(D)** $2\sqrt{2}$

6. Determine o valor exato da expressão seguinte:

$$\frac{3\tan\left(-\frac{7\pi}{3}\right)+2\sin\frac{4\pi}{3}}{2\cos\frac{7\pi}{6}+\tan\frac{5\pi}{6}}$$

7. O valor de $\arccos\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$ é:

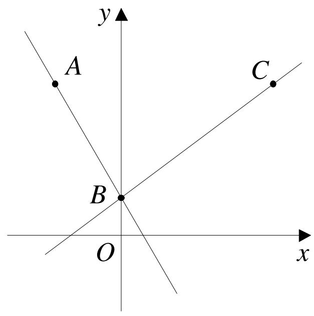
(A) $\frac{7\pi}{6}$ **(B)** $\frac{5\pi}{6}$ **(C)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(D)** $-\frac{\pi}{6}$

8. Resolva, no intervalo $]-\pi, \pi[$, a equação seguinte:

$$4\sin^2 x = 1-4\cos x$$

9. Considere, num referencial ortonormado Oxy, os pontos:

$$A\left(-\sqrt{3}\,,4\right),\ B(0\,,1)\ \text{e}\ C(4\,,4)$$



9.1. Determine a equação reduzida da reta que passa no ponto B e tem inclinação igual a $\frac{5\pi}{6}$ radianos.

9.2. A inclinação, em radianos, da reta AB é:

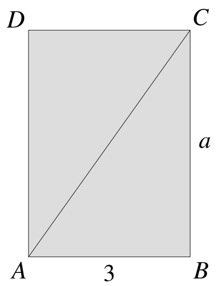
(A) $\frac{\pi}{3}$ **(B)** $-\frac{\pi}{3}$ **(C)** $\frac{2\pi}{3}$ **(D)** $\frac{4\pi}{3}$

9.3. Seja α a inclinação, em radianos, da reta BC.

Determine o valor da expressão seguinte:

$$3\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-2\sin\left(5\pi-\alpha\right)$$

10. Na figura está representado o retângulo $[ABCD]$ em que $\overline{AB}=3$ e $\overline{BC}=a$.



Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$?

(A) a^2 **(B)** 9 **(C)** $3\sqrt{9+a^2}$ **(D)** $3a$

Fim da prova

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item									
Cotação (em pontos)									
4.	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	**9.3.**	**10.**	
15	10	15	10	15	15	10	15	10	**115**
TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)									**200**

Proposta de resolução

Caderno 1

1.

1.1. $f(x)=2-4\sin\left(\frac{x}{3}\right)$; $D_f=\mathbb{R}$

Se $x\in D_f$, então $(x+6\pi)\in D_f$, porque $D_f=\mathbb{R}$.

$$f(x+6\pi)=2-4\sin\left(\frac{x+6\pi}{3}\right)=2-4\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{6\pi}{3}\right)=$$

$$=2-4\sin\left(\frac{x}{3}+2\pi\right)= \qquad \text{(A função seno é periódica de período } 2\pi\text{)}$$

$$=2-4\sin\left(\frac{x}{3}\right)=f(x)$$

Assim, $\forall x\in D_f$, $x+6\pi\in D_f$ e $f(x+6\pi)=f(x)$.

Logo, f é uma função periódica de período 6π.

1.2. Se $x\in D_f$, x toma qualquer valor real, pelo que $\frac{x}{3}$ também toma qualquer valor real e, como consequência, $\sin\left(\frac{x}{3}\right)$ toma todos os valores do intervalo $[-1,1]$.

$$-1\leq\sin\left(\frac{x}{3}\right)\leq 1\Leftrightarrow -4\leq 4\sin\left(\frac{x}{3}\right)\leq 4\Leftrightarrow -4\leq -4\sin\left(\frac{x}{3}\right)\leq 4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2-4\leq 2-4\sin\left(\frac{x}{3}\right)\leq 2+4\Leftrightarrow -2\leq f(x)\leq 6$$

$D'_f=[-2,6]$

1.3. $g(2)=0\Leftrightarrow 2\cos(2\pi+a)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\cos a=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos a=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\,k\in\mathbb{Z}$$

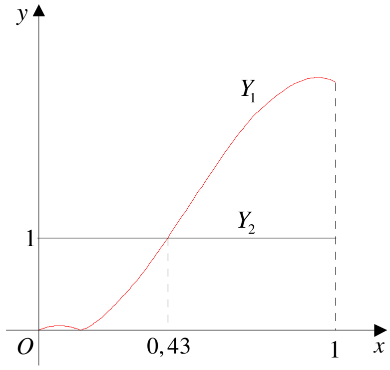
Para $k=0$ obtemos $a=\frac{\pi}{2}$, que é o menor valor positivo de a para o qual $g(2)=0$.

1.4. $f(x)=2-4\sin\left(\frac{x}{3}\right)$; $g(x)=2\cos(\pi x)$

Se $\overline{PQ}=1$, então x_0 é solução, no intervalo $]0,1[$, da equação $|f(x)-g(x)|=1$.

Para resolver esta equação usando a calculadora gráfica, determinamos a abcissa do ponto de interseção dos gráficos das funções $Y_1=|f(x)-g(x)|=\left|2-4\sin\left(\frac{x}{3}\right)-2\cos(\pi x)\right|$ e $Y_2=1$, no intervalo $]0,1[$.

Obtemos o resultado seguinte:



Logo, $x_0\approx 0,43$.

2. $3\sin(2x)+2,1=0 \wedge x\in\left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\sin(2x)=-2,1 \wedge x\in\left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin(2x)=-\frac{2,1}{3} \wedge 2x\in\left]-2\times\frac{\pi}{2},-2\times\frac{\pi}{4}\right[\Leftrightarrow$

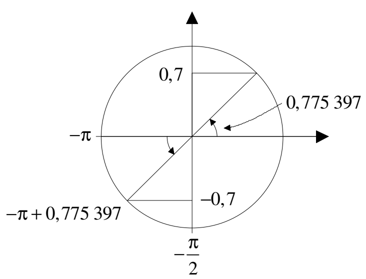
$\Leftrightarrow \sin(2x)=-0,7 \wedge 2x\in\left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$ $\qquad \arcsin(0,7)\approx 0,775\ 397$

$\Leftrightarrow \sin(2x)=-0,7 \wedge 2x\in\left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$

$\Rightarrow 2x\approx -\pi+0,775\ 397 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x\approx -2,3662 \Rightarrow$

$\Rightarrow x\approx -1,18$



3. Sejam $c = \overline{AB} = 1$ cm , $b = \overline{AC}$, $a = \overline{BC}$, $A = B\hat{A}C = 64^\circ$, $B = C\hat{B}A = 86^\circ$ e $C = A\hat{C}B$.

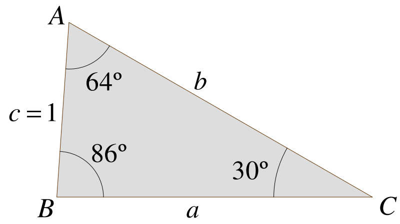
$C = 180^\circ - 86^\circ - 64^\circ = 30^\circ$

Pela lei dos senos:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sin 64^\circ}{a} = \frac{\sin 86^\circ}{b} = \frac{\sin 30^\circ}{1} \Leftrightarrow$$

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$



$$\Leftrightarrow \frac{\sin 64^\circ}{a} = \frac{1}{2} \wedge \frac{\sin 86^\circ}{b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 2\sin 64^\circ \wedge b = 2\sin 86^\circ$$

Perímetro de $[ABC] = a + b + c = 2\sin 64^\circ + 2\sin 86^\circ + 1 \approx 4,7927$

O perímetro do triângulo $[ABC]$, em centímetros com aproximação às centésimas, é igual a $4,79$.

Resposta: (B)

Caderno 2

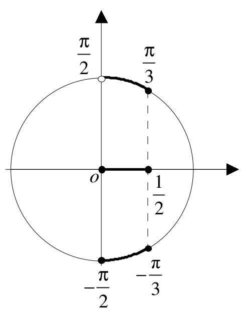
4. $1 - 2\cos(3x) \geq 0 \wedge x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right[\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -2\cos(3x) \geq -1 \wedge 3x \in \left[-\frac{3\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(3x) \leq \frac{1}{2} \wedge 3x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq 3x \leq -\frac{\pi}{3} \vee \frac{\pi}{3} \leq 3x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

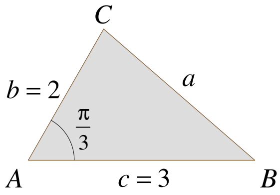
$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} \leq x \leq -\frac{\pi}{9} \vee \frac{\pi}{9} \leq x < \frac{\pi}{6}$$



$$S = \left[-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{6}\right[$$

5. Seja $c = \overline{AB} = 3\text{ cm}$, $b = \overline{AC} = 2\text{ cm}$, $a = \overline{BC}$ e $A = B\hat{A}C = \frac{\pi}{3}\text{ rad}$.

Pelo Teorema de Carnot:



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$$a^2 = 2^2 + 3^2 - 2\times2\times3\times\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 4 + 9 - 2\times2\times3\times\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 13 - 2\times6\times\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 13 - 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 7$$

Logo, $\overline{BC} = a = \sqrt{7}\text{ cm}$.

Resposta: (C)

6. $$\frac{3\tan\left(-\frac{7\pi}{3}\right) + 2\sin\frac{4\pi}{3}}{2\cos\frac{7\pi}{6} + \tan\frac{5\pi}{6}} = \frac{-3\tan\frac{7\pi}{3} + 2\sin\left(\frac{3\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(\frac{6\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{6\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)} =$$

$$= \frac{-3\tan\left(\frac{6\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + 2\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)} =$$

$$= \frac{-3\tan\frac{\pi}{3} - 2\sin\frac{\pi}{3}}{-2\cos\frac{\pi}{6} - \tan\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{-3\sqrt{3} - 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{-2\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}} =$$

$$= \frac{-3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{-\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}} =$$

$$= \frac{-4\sqrt{3}}{-\frac{4}{3}\sqrt{3}} =$$

$$= 4\times\frac{3}{4} = 3$$

7. $\cos\frac{7\pi}{6}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\arccos\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)=x\Leftrightarrow\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos x\wedge x\in[0\,,\,\pi]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\pi-\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{6}$$

$$\arccos\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{5\pi}{6}$$

Resposta: (B)

8. $4\sin^2 x=1-4\cos x\Leftrightarrow 4\left(1-\cos^2 x\right)+4\cos x-1=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4-4\cos^2 x+4\cos x-1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\cos^2 x+4\cos x+3=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 x-4\cos x-3=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4y^2-4y-3=0\Leftrightarrow \qquad y=\cos x$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{4\pm\sqrt{16-4\times 4\times(-3)}}{2\times 4}\Leftrightarrow y=\frac{4\pm\sqrt{64}}{8}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{4\pm 8}{8}\Leftrightarrow y=-\frac{4}{8}\vee y=\frac{12}{8}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}\vee y=\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{2}\vee\cos x=\frac{3}{2} \qquad y=\cos x$$

A equação $\cos x=\frac{3}{2}$ é impossível porque $\frac{3}{2}>1$. Portanto:

$$4\sin^2 x=1-4\cos x\wedge x\in\left]-\pi\,,\,\pi\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{2}\wedge x\in\left]-\pi\,,\,\pi\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-\pi+\frac{\pi}{3}\vee x=\pi-\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=-\frac{2\pi}{3}\vee x=\frac{2\pi}{3}$$

$$S=\left\{-\frac{2\pi}{3}\,,\,\frac{2\pi}{3}\right\}$$

9. $A\left(-\sqrt{3}\,,4\right)$, $B(0\,,1)$ e $C(4\,,4)$

9.1. Seja $y = mx + b$ a equação pedida.

$$m = \tan\frac{5\pi}{6} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Como a reta passa no ponto $B(0\,,1)$, a ordenada na origem é igual a 1. Logo, $b = 1$.

Assim, $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ é a equação pedida.

9.2. $A\left(-\sqrt{3}\,,4\right)$ e $B(0\,,1)$

Declive da reta AB:

$$m = \frac{1-4}{0-\left(-\sqrt{3}\right)} = \frac{-3}{\sqrt{3}} = \frac{-3\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{-3\times\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

Seja θ a inclinação da reta AB:

$$\tan\theta = -\sqrt{3} \wedge \theta \in \left]\frac{\pi}{2}\,,\pi\right[$$

Portanto, $\theta = \pi - \arctan\sqrt{3} = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$.

A inclinação da reta AB é igual a $\dfrac{2\pi}{3}$ radianos.

Resposta: (C)

9.3. $B(0\,,1)$ e $C(4\,,4)$

Declive da reta BC:

$$m = \frac{4-1}{4-0} = \frac{3}{4}$$

Se α é a inclinação da reta BC, vem:

$$\tan\alpha = \frac{3}{4} \wedge \alpha \in \left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$$

$$3\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - 2\sin(5\pi - \alpha) =$$

$$= -3\sin\alpha - 2\sin(\pi - \alpha) =$$

$$= -3\sin\alpha - 2\sin\alpha =$$

$$= -5\sin\alpha$$

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow 1+\frac{9}{16}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{25}{16}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{16}{25}$$

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$$

Dado que $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, temos $\sin\alpha=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$.

Finalmente, $3\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-2\sin\left(5\pi-\alpha\right)=-5\sin\alpha=-5\times\frac{3}{5}=-3$.

10. Seja C' a projeção ortogonal do ponto C na reta AB.

Como $C'\equiv B$, vem que $\overrightarrow{AC'}$ e $\overrightarrow{AB}$ têm o mesmo sentido, pelo que:

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overline{AB}\times\overline{AC'}=\overline{AB}\times\overline{AB}=3\times3=9$