Proposta de miniteste de avaliação

Matemática A

11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 45 minutos | **Data:**

Nota importante:
No que respeita às propostas de testes de avaliação do 11.º ano já enviadas em *newsletters* anteriores do projeto *Máximo*, nunca foram incluídas questões sobre **ângulo de duas retas**, uma vez que este conteúdo não faz parte do atual Programa e Metas Curriculares.

Grupo I

1. Considere o vetor $\vec{u}(-4,\ 3)$ e os pontos $A(-2,\ 1)$ e $B(-3,\ -1)$.

Um valor arredondado, à décima do radiano, do ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\overrightarrow{AB}$ é:

(A) 1,3 rad
(B) 1,4 rad
(C) 1,7 rad
(D) 1,8 rad

2. Relativamente à sucessão cujo termo geral é $u_n = \dfrac{(-1)^{2n+1}}{n+1}$, podemos afirmar que é:

(A) monótona e limitada
(B) monótona e não limitada
(C) não monótona e não limitada
(D) não monótona mas limitada

3. Considere a sucessão (v_n) definida por recorrência:

$$\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = v_n + 3,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

A soma dos 20 primeiros termos é:

(A) 410
(B) 570
(C) 610
(D) 670

Grupo II

1. Considere a sucessão (w_n) cujo termo geral é:

$$w_n = \frac{3-n}{2+3n}$$

1.1. Calcule o valor exato de $w_4 - w_8$.

1.2. Averigue se $-\frac{19}{68}$ é termo da sucessão e, em caso afirmativo, indique a ordem.

1.3. Estude a monotonia da sucessão (w_n).

1.4. A sucessão (w_n) é limitada? Justifique a sua resposta.

2. Considere a sucessão (t_n) cujo termo geral é:

$$t_n = \frac{12^{n+1}}{4^n}$$

2.1. Mostre que (t_n) é uma progressão geométrica.

2.2. Indique a razão e estude a monotonia da progressão.

2.3. Calcule a soma dos 15 termos consecutivos de progressão a partir do 4.º termo, inclusive.

3. Prove, por indução matemática, que a proposição seguinte é verdadeira:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+....+\frac{1}{2^n}=2-2^{-n},\ \forall n\in \mathbb{N}_0$$

FIM

Cotações

Grupo I

1.	2.	3.	Total
8	8	8	24

Grupo II

1.1.	1.2.	1.3.	1.4.	2.1.	2.2.	2.3.	3.	Total
17	22	24	22	22	17	22	30	176

Propostas de resolução

Grupo I

1. $\overrightarrow{AB} = B - A = (-3,\ -1) - (-2,\ 1) = (-1,\ -2)$

$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\vec{u}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}\,,\ \overrightarrow{AB}}\right)$

$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = (-4,\ 3) \cdot (-1,\ -2) = 4 - 6 = -2$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$\cos\left(\widehat{\vec{u}\,,\ \overrightarrow{AB}}\right) = \dfrac{-2}{5\sqrt{5}}$

$\cos^{-1}\left(-\dfrac{2}{5\sqrt{5}}\right) \approx 1{,}8 \text{ rad}$

Resposta: (D)

2. $u_n = \dfrac{(-1)^{2n+1}}{n+1} = \dfrac{(-1)^{2n} \times (-1)}{n+1} = \dfrac{\left[(-1)^2\right]^n \times (-1)}{n+1} = \dfrac{1^n \times (-1)}{n+1} = \dfrac{-1}{n+1}$

$u_{n+1} - u_n = \underset{(n+1)}{\dfrac{-1}{n+2}} + \underset{(n+2)}{\dfrac{1}{n+1}} = \dfrac{-n-1+n+2}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n > 0$

Logo, (u_n) é monótona crescente.

Como (u_n) é crescente, então $u_1 = -\dfrac{1}{2}$ é minorante.

$\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{n+1} > 0$, logo $\forall n \in \mathbb{N},\ -\dfrac{1}{n+1} < 0$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ -\dfrac{1}{2} \le u_n < 0$

Portanto, a sucessão (u_n) é limitada

Resposta: (A)

3. $v_{n+1} - v_n = 3$

(v_n) é uma progressão aritmética de razão $r = 3$.

O termo geral é $v_n = v_1 + (n-1)r$ **.**

$v_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$

$v_{20} = 3 \times 20 - 1 = 59$

$S_{20} = \dfrac{v_1 + v_{20}}{2} \times 20 = \dfrac{2+59}{2} \times 20 = 610$

Resposta: (C)

Grupo II

1.1. $w_4=\dfrac{3-4}{2+12}=\dfrac{-1}{14}$

$w_8=\dfrac{3-8}{2+24}=\dfrac{-5}{26}$

$w_4-w_8=-\underset{(\times 13)}{\dfrac{1}{14}}+\underset{(\times 7)}{\dfrac{5}{26}}=\dfrac{22}{182}=\dfrac{11}{91}$

1.2. $w_n=-\dfrac{19}{68}\Leftrightarrow\dfrac{3-n}{2+3n}=-\dfrac{19}{68}\Leftrightarrow\underset{(68)}{\dfrac{3-n}{2+3n}}+\underset{(2+3n)}{\dfrac{19}{68}}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{204-68n+38+57n}{68(2+3n)}=0\Leftrightarrow\dfrac{242-11n}{68(2+3n)}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 242-11n=0\Leftrightarrow n=\dfrac{242}{11}\Leftrightarrow n=22$

$-\dfrac{19}{68}$ é termo da sucessão de ordem $n=22$.

1.3. $w_{n+1}-w_n=\dfrac{3-(n+1)}{2+3(n+1)}-\dfrac{3-n}{2+3n}=\underset{(2+3n)}{\dfrac{2-n}{5+3n}}-\underset{(5+3n)}{\dfrac{3-n}{2+3n}}=$

$=\dfrac{4-\cancel{2n}+\cancel{6n}+\cancel{3n^2}-15-\cancel{9n}+\cancel{5n}+\cancel{3n^2}}{(5+3n)(2+3n)}=\dfrac{-11}{(5+3n)(2+3n)}$

$\forall n\in\mathbb{N}, w_{n+1}-w_n<0$

A sucessão (u_n) é monótona decrescente.

1.4. Como (u_n) é decrescente, então $w_1=\dfrac{2}{5}$ é majorante.

$\dfrac{3-n}{2+3n}=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{\frac{11}{3}}{3n+2}$

$$\begin{array}{r|l} -\cancel{n}+3 & 3n+2 \\ \cline{2-2} \cancel{n}+\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \hline \frac{11}{3} & \end{array}$$

$\dfrac{1}{3n+2}>0,\ \forall n\in\mathbb{N}$

$\dfrac{\frac{11}{3}}{3n+2}>0,\ \forall n\in\mathbb{N}$

$-\dfrac{1}{3}+\dfrac{\frac{11}{3}}{3n+2}>-\dfrac{1}{3},\ \forall n\in\mathbb{N}$

$w_n>-\dfrac{1}{3},\ \forall n\in\mathbb{N}$

Logo, $-\dfrac{1}{3}<w_n\leq\dfrac{2}{5},\ \forall n\in\mathbb{N}$, pelo que a sucessão (w_n) é limitada.

2.1. $\dfrac{t_{n+1}}{t_n}=\dfrac{\dfrac{12^{n+2}}{4^{n+1}}}{\dfrac{12^{n+1}}{4^n}}=\dfrac{12^{n+2}\times 4^n}{12^{n+1}\times 4^{n+1}}=12^{\cancel{n}+2-\cancel{n}-1}\times 4^{\cancel{n}-\cancel{n}-1}=12\times 4^{-1}=\dfrac{12}{4}=3$ (constante)

(t_n) é uma progressão geométrica.

2.2. (t_n) é uma progressão geométrica de razão 3 (como se mostra em **2.1.**)

$$t_n=\frac{12^{n+1}}{4^n}=\frac{12^n\times 12}{4^n}=\left(\frac{12}{4}\right)^n\times 12=3^n\times 12$$

$$t_{n+1}-t_n=3^{n+1}\times 12-3^n\times 12=3^n\times 3\times 12-3^n\times 12=3^n\times 12\times(3-1)=3^n\times 24$$

$$t_{n+1}-t_n>0,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

Logo, (t_n) é monótona crescente.

2.3. $t_4=\dfrac{12^5}{4^4}=972$

$$S_{15}=t_4\times\frac{1-r^{15}}{1-r}=972\times\frac{1-3^{15}}{1-3}=-486(1-3)^{15}=6\ 973\ 568\ 316$$

3. $P(n):\ 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}=2-2^{-n},\ \forall n\in\mathbb{N}_0$

(**I**) $P(0)$ é verdadeira

$$\frac{1}{2^0}=2-2^{-0}\Leftrightarrow\frac{1}{2}=2-1\Leftrightarrow 1=1 \quad \text{(proposição verdadeira)}$$

Logo, $P(0)$ é verdadeira.

(**II**) Hereditariedade

Hipótese: $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}=2-2^{-n}$; Tese: $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots+\dfrac{1}{2^{n+1}}=2-2^{-n-1}$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{2^{n+1}}=$$

Por hipótese

$$=\left(2-2^{-n}\right)+\frac{1}{2^{n+1}}=$$

$$=2-2^{-n}+2^{-n-1}=2-2^{-n}+2^{-n}\times 2^{-1}=$$

$$=2-2^{-n}\left(1-2^{-1}\right)=2-2^{-n}\left(1-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=2-2^{-n}\times\frac{1}{2}=2-2^{-n}\times 2^{-1}=2-2^{-n-1}$$

Provado (**I**) e (**II**) fica demonstrado que:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}=2-2^{-n},\ \forall n\in\mathbb{N}_0$$