Proposta de Teste [abril – 2018]

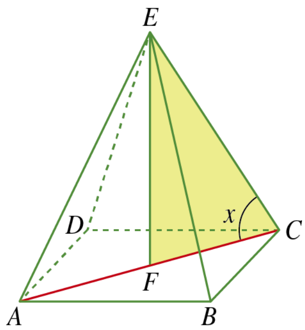
Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1. Na figura está representada uma pirâmide quadrangular regular.



Sabe-se que:

. a base da pirâmide tem centro F e área 8;

. x designa a amplitude, em radianos, do ângulo ECA e $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1.1. Mostra que o volume da pirâmide é dado, em função de x, por:

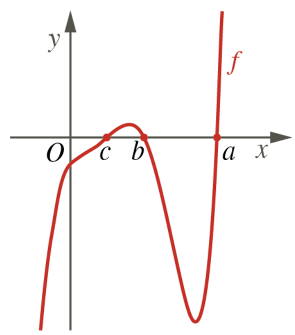
$$V(x) = \frac{16\tan(x)}{3}, \quad x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

1.2. Determina o valor de x, arredondado às centésimas, no caso de o volume da pirâmide ser igual a 10.

1.3. O valor do produto escalar $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CE}$ é igual a:

(A) 4 **(B)** 8 **(C)** 0 **(D)** -4

2. Na figura está representado o gráfico de uma função polinomial f, de grau 5, com exatamente três zeros: a, b e c.



Sabe-se que:

. a, b e c são termos consecutivos de uma progressão geométrica (u_n) de razão $\frac{1}{2}$, sendo a o primeiro termo;

. $abc = 27$

Calcula a soma de todos os termos de (u_n).

3. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma quadrangular reto $[ABCDEFGH]$.

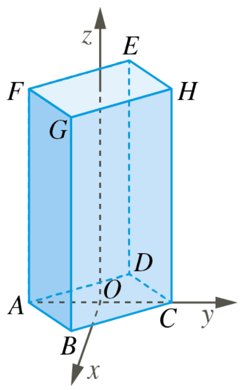
Sabe-se que:

. a face $[ABCD]$ é um retângulo contido no plano xOy;

. o plano BCH é definido pela equação $3x+\sqrt{6}\,y-5\sqrt{6}=0$;

. os vértices A e C pertencem ao eixo Oy e são simétricos em relação à origem;

. o vértice B tem coordenadas $\left(2\sqrt{6},-1,\,0\right)$.



3.1. Representa a reta BG através de uma equação vetorial.

3.2. Determina a medida do volume do prisma, sabendo que o plano EFG é definido pela equação $z=12$.

Apresenta o resultado arredondado às décimas.

4. Na parede de uma sala foi detetada humidade às 8 horas.

Com o passar do tempo a humidade foi-se propagando na forma de um quarto de círculo de raio r.

Admite que a área, em metros quadrados, t horas após a mancha ter sido detetada, é dada pela função f definida por:

$$f(t)=\frac{3t+1}{t+2}\ ,\ \ 0\leq t\leq 8$$

Recorre às capacidades gráficas da calculadora e resolve o seguinte problema:

Em dado momento avaliou-se a extensão da mancha provocada pela humidade e verificou-se que correspondia a um quarto de círculo com 1,7 m de raio.

Determina a que horas ocorreu essa avaliação.

Na tua resposta deves explicitar, de forma clara, as seguintes etapas:

. O valor exato, em metros quadrados, da área da região ocupada pela mancha.

. Reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiveres necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial.

. Apresentar a resposta na forma $\boxed{\cdots}$h $\boxed{\cdots}$min $\boxed{\cdots}$s (os segundos arredondados às unidades).

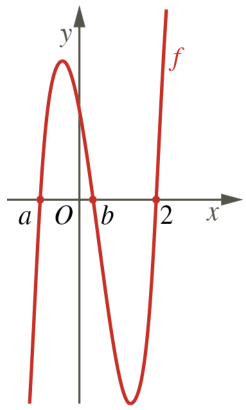
FIM (Caderno 1)

Cotações								Total
Questões – Caderno 1	**1.1.**	**1.2.**	**1.3.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4**	
Pontos	12	13	10	15	10	10	10	**80**

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora gráfica)

1. Sejam f e g duas funções polinomiais de graus 3 e 2 , respetivamente.

Na figura está representado o gráfico da função f.



Sabe-se que:

- $f(x)=3x^3-4x^2-5x+2$
- $g(x)=x^2-2x-3$
- um dos zeros de f é 2 e os outros são representados por a e por b.

Simplifica a expressão $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ e indica o domínio onde é válida a simplificação.

2. Considera, em $\mathbb{R}$, a inequação $\dfrac{2}{x}>1$.

O conjunto-solução é:

(A) $]0,\ 2[$ **(B)** $]-\infty,\ 2[$ **(C)** $\left]-\infty,\ \dfrac{1}{2}\right[$ **(D)** $]2,\ +\infty[$

3. Seja h uma função de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^2+x} & \text{se } x<-1\\[2mm] \dfrac{3k+1}{x^2+1} & \text{se } x\geq -1\end{cases} \quad ;\ k\in\mathbb{R}$$

3.1. Sabe-se que a função é contínua em $x=-1$.

O valor de k é:

(A) -1 **(B)** 2 **(C)** 1 **(D)** 4

3.2. Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n=\dfrac{-2n-1}{n+1}$.

a) Estuda a sucessão (u_n) quanto à monotonia.

b) O valor de $\lim\left(h(u_n)\right)$ é igual a:

(A) -1 **(B)** $\dfrac{3}{2}$ **(C)** $-\infty$ **(D)** 0

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, definida por $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$, e seja g a função tal que $g(x)=-3+f(x-2)$.

As equações das assíntotas do gráfico de g são:

(A) $x=-1$ e $y=5$ **(B)** $x=1$ e $y=-3$

(C) $x=4$ e $y=-1$ **(D)** $x=1$ e $y=-1$

5. Considera as funções f e g tais que:

$$f(x)=\frac{3x}{x+1} \quad \text{e} \quad g(x)=3-x$$

5.1. Resolve a inequação $f(x)\leq x$. Apresenta o resultado na forma de intervalo ou reunião de intervalos de números reais.

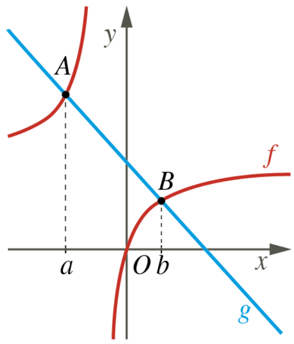
5.2. Calcula, caso exista, cada um dos seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{g(x)}{x^2-x-6}$

5.3. Na figura, em referencial o.n. xOy, estão representadas as funções f e g.

Os pontos A e B são os pontos de interseção dos dois gráficos, com abcissas a e b, respetivamente.

Mostra que $a+b=-1$.



FIM (Caderno 2)

Cotações												
	Caderno 1 (com calculadora)											
Questões	1.1.	1.2.	1.3.	2.	3.1.	3.2.	4.					
Pontos	12	13	10	15	10	10	10				Total	80
	Caderno 2 (sem calculadora)											
Questões	1.	2.	3.1.	3.2. a)	3.2. b)	4.	5.1.	5.2. a)	5.2. b)	5.3.		
Pontos	15	10	12	10	10	10	18	10	10	15	Total	120
Total												200

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr
(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$

(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$