CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1.1. $\overline{AB}^2 = 8 \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{8}$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo [*ABC*], tem-se $\overline{AC}^2 = \sqrt{8}^2 + \sqrt{8}^2 \Leftrightarrow \overline{AC} = 4$.

Então, $\overline{FC} = 2$. Assim, $\tan(x) = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{FC}} \Leftrightarrow \overline{EF} = 2\tan(x)$.

$V(x) = \dfrac{1}{3} \times 8 \times 2\tan(x) = \dfrac{16\tan(x)}{3}$, como se pretendia provar.

1.2. $V(x) = 10 \Leftrightarrow \dfrac{16\tan(x)}{3} = 10 \Leftrightarrow \tan(x) = \dfrac{30}{16} \Leftrightarrow \tan(x) = \dfrac{15}{8}$.

Então, $x \approx 1{,}08$ rad.

Resposta: O valor de *x* é de 1,08 radianos, aproximadamente.

1.3. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CE} = \overline{CA} \times \overline{CF} = 4 \times 2 = 8$

Opção (B): 8

2. $u_1 = a$; $u_2 = b = \dfrac{a}{2}$; $u_3 = c = \dfrac{a}{4}$

$abc = 27 \Leftrightarrow a \times \dfrac{a}{2} \times \dfrac{a}{4} = 27 \Leftrightarrow a^3 = 216 \Leftrightarrow a = 6$

Seja *S* a soma de todos os termos da progressão geométrica (u_n).

$$S = \lim\left(u_1 \frac{1-r^n}{1-r}\right) = \lim\left(6 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right) = \lim\left(12 \times \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\right) = 12 \times (1-0) = 12$$

Resposta: A soma de todos os termos de (u_n) é 12.

3.

3.1. A reta *BG* é paralela ao eixo *Oz* e passa por *B*.

Resposta: $(x, y, z) = \left(2\sqrt{6}, -1, 0\right) + k(0,0,1),\ k \in \mathbb{R}$

3.2. $\overline{BG}=12$

Seja $C(0,y,0)$. Como $C\in BCH$, tem-se $\sqrt{6}\,y-5\sqrt{6}=0 \Leftrightarrow y=5$.

Assim, as coordenadas de C e A são, respetivamente, $(0,5,0)$ e $(0,-5,0)$.

$$\overline{BC}=\sqrt{\left(-2\sqrt{6}\right)^2+6^2}=\sqrt{60}$$

$$\overline{AB}=\sqrt{\left(2\sqrt{6}\right)^2+4^2}=\sqrt{40}$$

Seja V o volume do prisma.

$$V=\overline{AB}\times\overline{BC}\times\overline{BG}=\sqrt{40}\times\sqrt{60}\times 12\approx 587{,}9$$

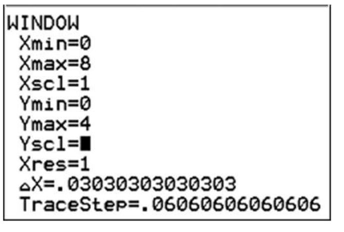
Resposta: A medida do volume do prisma é de, aproximadamente, 587,9 u.v..

4. Seja A a área da mancha quando o raio é igual a 1,7 m.

$$A=\frac{\pi\times 1{,}7^2}{4}=0{,}7225\pi=\frac{289}{400}\pi$$

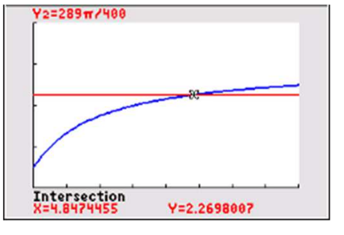
Para resolver $f(t)=\frac{289}{400}\pi$, introduzem-se, na calculadora, as expressões das funções:

$$y_1=f(t) \quad \text{e} \quad y_2=\frac{289}{400}\pi$$



Atendendo ao domínio definido, obtém-se o ponto de interseção dos gráficos:

$$(4{,}8474\ ;\ 2{,}2698)$$



Conclui-se que, ao fim de 4,8474 horas, a mancha atingiu a área de $\frac{289}{400}\pi$.

$$0{,}8474\times 60=50{,}844$$

$$0{,}844\times 60=50{,}64$$

O tempo decorrido foi de 4 h 50 min 51 s.

8 h + 4 h 50 min 51 s =12 h 50 min 51 s

Resposta: A avaliação ocorreu às 12 h 50 min 51 s.

FIM (Caderno 1)

Cotações								Total
Questões – Caderno 1	**1.1.**	**1.2.**	**1.3.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	
Pontos	12	13	10	15	10	15	15	**80**

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora gráfica)

1. $D=\{x\in\mathbb{R}: g(x)\neq 0\}$

$g(x)\neq 0 \Leftrightarrow \sim(g(x)=0) \Leftrightarrow \sim\left(x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}\right) \Leftrightarrow \sim(x=3 \vee x=-1) \Leftrightarrow x\neq 3 \wedge x\neq -1$

Assim, $D=\mathbb{R}\setminus\{-1,3\}$.

	3	–4	–5	2
2		6	4	–2
	3	2	–1	0

$f(x)=(3x^2+2x-1)(x-2)$

$3x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{6} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3} \vee x=-1$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+1)(x-2)}{(x-3)(x+1)}=\frac{(3x-1)(x-2)}{x-3}=\frac{3x^2-7x+2}{x-3}$$

Resposta: $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{3x^2-7x+2}{x-3}$ em $\mathbb{R}\setminus\{-1,3\}$

2. $\dfrac{2}{x}>1 \Leftrightarrow \dfrac{2}{x}-1>0 \Leftrightarrow \dfrac{2-x}{x}>0$

	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$2-x$	+	+	+	0	–
x	–	0	+	+	+
	–	s.s.	+	0	–

$x\in\,]0\,,\,2[$

Opção: (A) $x\in\,]0\,,\,2[$

3.1. $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2-1}{x^2+x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{-2}{-1}=2$

$\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{3k+1}{x^2+1}=\dfrac{3k+1}{2}=h(-1)$

Para a função ser contínua em $x=-1$ é necessário que $\lim\limits_{x\to -1^-}h(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}h(x)=h(-1)$, ou seja:

$\dfrac{3k+1}{2}=2 \Leftrightarrow 3k+1=4 \Leftrightarrow k=1$

Opção: (C) 1

3.2

a) $u_{n+1} - u_n = \frac{-2(n+1)-1}{n+1+1} - \frac{-2n-1}{n+1} = \frac{-2n-3}{n+2} + \frac{2n+1}{n+1}$

$\frac{-2n^2-2n-3n-3+2n^2+4n+n+2}{(n+2)(n+1)} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0 \text{ , } \forall n \in \mathbb{N}$

Resposta: A sucessão (u_n) é estritamente decrescente.

b) $\lim(u_n) = \lim \frac{-2n-1}{n+1} = -2$

Como $u_1 = -\frac{3}{2}$ e (u_n) é decrescente, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < -1$.

$\lim(h(u_n)) = \lim \frac{{u_n}^2 - 1}{{u_n}^2 + u_n} = \frac{(-2)^2-1}{(-2)^2-2} = \frac{3}{2}$

Opção: (B) $\frac{3}{2}$

4. $D_f = \mathbb{R} \backslash \{-1\}$

$f(x) = \frac{2x-3}{x+1} = 2 - \frac{5}{x+1}$

As assíntotas ao gráfico de f são: $y = 2$ e $x = -1$.

O gráfico de g obtém-se a partir do gráfico de f através de uma translação associada ao vetor $(2, -3)$.

Então, as assíntotas de g são $y = -1$ e $x = 1$.

Opção: (D) $x = 1$ e $y = -1$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} 2x+3 & x+1 \\ \hline -2x-2 & 2 \\ -5 & \end{array}$$

5.

5.1. $f(x) \leq x \Leftrightarrow \frac{3x}{x+1} \leq x \Leftrightarrow \frac{3x}{x+1} - x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3x - x^2 - x}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x - x^2}{x+1} \leq 0$

x	$-\infty$	-1		0		2	$+\infty$
$2x-x^2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{2x-x^2}{x+1}$	$+$	s.s.	$-$	0	$+$	0	$-$

Cálculo auxiliar

$2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2-x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

$\frac{2x-x^2}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-1, 0] \cup [2, +\infty[$

Resposta: $x \in]-1, 0] \cup [2, +\infty[$

5.2.

a) $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x+1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{1+\frac{1}{x}} = 3$$

Resposta: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$

b) $$\lim_{x\to 3} \frac{g(x)}{x^2-x-6} = \lim_{x\to 3} \frac{3-x}{x^2-x-6} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 3} \frac{3-x}{(x-3)(x+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-1}{x+2} = -\frac{1}{5}$$

Cálculo auxiliar

$$x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=3 \vee x=-2$$

Resposta: $\lim\limits_{x\to 3} \frac{g(x)}{x^2-x-6} = -\frac{1}{5}$

5.3 $$\frac{3x}{x+1} = 3-x \Leftrightarrow \frac{3x}{x+1} - 3 + x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-3x-3+x^2+x}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-3}{x+1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-3=0 \ \wedge\ x+1\neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1+12}}{2} \ \wedge\ x\neq -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \ \vee\ x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$$

Então, $a = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$ e $b = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Assim, $a+b = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} = -1$, como se pretendia mostrar.

FIM (Caderno 2)

Cotações												
	Caderno 1 (com calculadora)											
Questões	**1.1.**	**1.2.**	**1.3.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**					
Pontos	12	13	10	15	10	10	10				**Total**	**80**
	Caderno 2 (sem calculadora)											
Questões	**1.**	**2.**	**3.1.**	**3.2. a)**	**3.2. b)**	**4.**	**5.1.**	**5.2. a)**	**5.2. b)**	**5.3.**		
Pontos	15	10	12	10	10	10	18	10	10	15	**Total**	**120**
Total												**200**

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr

(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$

(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$

(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$