CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1.

1.1. $\overline{AB}^2 = 6,25$, ou seja, $\overline{AB} = \sqrt{6,25} = 2,5$.

Como $\sin\theta = \dfrac{2}{2,5} = \dfrac{4}{5}$ e $0 < \theta < 90°$, conclui-se que $\theta \approx 53,13°$.

Resposta: OPÇÃO (A) 53,13

1.2. Seja $y = mx + b$ a equação reduzida da reta *AB* e *P* o ponto (4 , 0).
Sabe-se que o triângulo [*APB*] é retângulo.
$\overline{AP}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{AP}^2 + 2^2 = 6,25 \Leftrightarrow \overline{AP}^2 = 2,25$. Então, $\overline{AP} = 1,5$.

$$m = \tan\theta = \frac{2}{1,5} = \frac{4}{3}$$

Como $B \in AB$, tem-se $2 = \dfrac{4}{3} \times 4 + b \Leftrightarrow b = -\dfrac{10}{3}$.

Então, a equação reduzida da reta *AB* é $y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{10}{3}$, como se pretendia provar.

1.3. Tem-se $BC \perp AB$. Seja $y = m_{BC}x + b_{BC}$ a equação reduzida da reta *BC*.

$$m_{BC} = -\frac{1}{m} = -\frac{3}{4}$$

Como $B \in BC$ tem-se: $2 = -\dfrac{3}{4} \times 4 + b_{BC} \Leftrightarrow b_{BC} = 5$

$$\begin{cases} y = -\dfrac{3}{4}x + 5 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 0 \end{cases}$$

Resposta: O ponto de interseção da reta *BC* com o eixo *Oy* é $(0,5)$.

2.

2.1. Seja u_1 a medida do lado do primeiro quadrado.
Como $u_1^2 = 1024$, tem-se $u_1 = 32$.

A expressão geral das medidas dos lados é $u_n = 32 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

$$u_8 = 32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 0,25$$

Resposta: OPÇÃO (B) 0,25

2.2. A expressão geral das medidas dos lados é $u_n = 32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

$u_n = 2^5 \times \frac{1}{2^{n-1}} \Leftrightarrow u_n = 2^{5-n+1} \Leftrightarrow u_n = 2^{6-n}$

$$S_{12} = 32 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}{1-\frac{1}{2}} = 64 \times \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{12}\right] \approx 63{,}98$$

A soma dos 12 primeiros termos da sucessão é, aproximadamente, 63,98.

3. Vejamos a partir de que ordem os termos pertencem a $V_{0{,}0015}(-3)$.

$$|u_n + 3| < 0{,}0015 \Leftrightarrow \left|\frac{1-3n}{n+1} + 3\right| < 0{,}0015 \Leftrightarrow \left|\frac{1-3n+3n+3}{n+1}\right| < \frac{15}{10\,000}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{n+1} < \frac{15}{10\,000} \Leftrightarrow 40000 < 15n + 15 \ ; \ n > 2665{,}67$$

Como $n \in \mathbb{N}$, tem-se $n \geq 2666$.

Resposta: Há 2665 termos que não pertencem a $V_{0{,}0015}(-3)$.

4. Área da base do prisma:

Seja $A(a, 0, 0)$ e $B(0, b, 0)$.

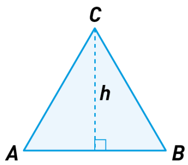
Como A e B pertencem a α, tem-se:

$4a - 8 = 0 \Leftrightarrow a = 2$. Então, $A(2, 0, 0)$.

$2b - 8 = 0 \Leftrightarrow b = 4$. Então, $B(0, 4, 0)$.

$\overline{AB} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20}$

Seja h a altura do triângulo [ABC].



$h^2 + \left(\frac{\sqrt{20}}{2}\right)^2 = \sqrt{20}^2 \Leftrightarrow h^2 = 15$. Então, $h = \sqrt{15}$.

$$A_{base} = \frac{\sqrt{20} \times \sqrt{15}}{2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

A área da base do prisma é $5\sqrt{3}$.

- **Altura do prisma**:

A reta DC pode ser definida, vetorialmente, por $(x, y, z) = \left(-1, 1, 2\sqrt{10}\right) + k\left(4, 2, -\sqrt{10}\right)$, $k \in \mathbb{R}$.

Como $C \in DC$, o ponto C é do tipo $(x, y, z) = \left(-1+4k\ , 1+2k\ , 2\sqrt{10} - \sqrt{10}\,k\right)$, $k \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, $C \in \alpha$. Tem-se:

$$4(-1+4k) + 2(1+2k) - \sqrt{10}\left(2\sqrt{10} - \sqrt{10}k\right) - 8 = 0 \Leftrightarrow -4 + 16k + 2 + 4k - 20 + 10k - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30k = 30 \Leftrightarrow k = 1$$

O ponto C tem coordenadas $(x, y, z) = \left(3\ ,\ 3\ ,\ \sqrt{10}\ \right)$.

$\overline{CD} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + \sqrt{10}^2} = \sqrt{30}$

A altura do prisma é $\sqrt{30}$.

- Volume do prisma:

$V = 5\sqrt{3} \times \sqrt{30} \approx 47{,}43$

Resposta: O volume do prisma é, aproximadamente, 47,43.

FIM (Caderno 1)

Cotações								Total
Questões - Caderno 1	**1.1.**	**1.2.**	**1.3.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.**	
Pontos	10	10	10	10	10	10	20	**80**

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora gráfica)

5.

5.1. O ponto *C* tem coordenadas (–1 , 0 , 2).

Vejamos se existe $k\in\mathbb{R}$ tal que $(-1,0,2)=(-3,-4,0)+k(1,2,1)$.

$\begin{cases}-1=-3+k\\0=-4+2k\\2=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2=k\\2=k\\2=k\end{cases}$. Conclui-se que $C\in s$.

Resposta: O ponto *C* pertence à reta *s*.

5.2. Seja $A(0,0,a)$.

Como *A* pertence à superfície esférica de equação $(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=10$, tem-se:

$1+0+(z-2)^2=10 \Leftrightarrow (z-2)^2=9 \Leftrightarrow z-2=3 \vee z-2=-3 \Leftrightarrow z=5 \vee z=-1$.

Como *A* tem cota positiva, $A(0,0,5)$.

Como $s\perp\alpha$, um vetor diretor de *s* é normal a α. Assim, uma equação representativa de α pode ser: $x+2y+z+d=0$. Como $A\in\alpha$, tem-se $5+d=0\Leftrightarrow d=-5$.

Resposta: Uma equação do plano α é $x+2y+z-5=0$.

6.

$\begin{cases}u_7=2u_5\\u_7+u_5=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_7=2u_5\\2u_5+u_5=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_7=\dfrac{16}{3}\\u_5=\dfrac{8}{3}\end{cases}$

$u_7=u_5+2r \Leftrightarrow \frac{16}{3}=\frac{8}{3}+2r \Leftrightarrow r=\frac{4}{3}$. Então, $u_n=u_5+(n-5)r \Leftrightarrow u_n=\frac{8}{3}+(n-5)\times\frac{4}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_n=\frac{8}{3}+\frac{4}{3}n-\frac{20}{3} \Leftrightarrow u_n=\frac{4}{3}n-4$

Resposta: O termo geral da sucessão é $u_n=\frac{4}{3}n-4$.

7. Como $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n<0$, tem-se $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1 \Leftrightarrow u_{n+1}<u_n,\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Então, conclui-se que (u_n) é monótona decrescente.

Resposta: OPÇÃO (D) A sucessão (u_n) é monótona decrescente.

8. Trata-se de uma progressão aritmética de razão 5 pois, $u_{n+1}-u_n=5$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

$u_n=-2+(n-1)\times 5 \Leftrightarrow u_n=5n-7$

$S_n=\frac{u_1+u_n}{2}\times n \Leftrightarrow S_n=\frac{-2+5n-7}{2}\times n \Leftrightarrow S_n=\frac{5n-9}{2}\times n \Leftrightarrow S_n=\frac{5n^2-9n}{2}$

$$\lim\left(\frac{1}{n^2}\times S_n\right)=\lim\left(\frac{5n^2-9n}{2n^2}\right)\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\left(\frac{n^2\left(5-\frac{9}{n}\right)}{2n^2}\right)=\lim\left(\frac{5-\frac{9}{n}}{2}\right)=\frac{5-0}{2}=\frac{5}{2}$$

Resposta: $\lim\left(\frac{1}{n^2}\times S_n\right)=\frac{5}{2}$

9.

9.1. $\lim(w_n)=\lim\frac{5^{n+1}-3^n}{1+5^n}=\lim\frac{5^n\left(5-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)}{5^n\left(\frac{1}{5^n}+1\right)}=\lim\frac{5-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{\frac{1}{5^n}+1}=\frac{5-0}{0+1}=5$

Resposta: $\lim(w_n)=5$

9.2. Como (t_n) e (v_n) diferem por um número finito de termos (50 termos),

$\lim t_n=\lim v_n=\lim\frac{2}{n+5}=\frac{2}{+\infty}=0$.

Resposta: OPÇÃO (C) $\lim t_n=0$

10.

10.1. Para $n=1$ tem-se $u_1=k$, o que se verifica.

Hipótese: $u_p=k$

Tese: $u_{p+1}=k$

Demonstração: $u_{p+1}=-k+2u_p$. Por hipótese, $u_p=k$, logo $u_{p+1}=-k+2k=k$.

A propriedade é válida para $n=1$ e é hereditária, logo $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=k$.

10.2. $\sum_{i=26}^{85}u_i=180 \Leftrightarrow u_{26}+u_{27}+...+u_{85}=180 \Leftrightarrow \underbrace{k+k+...+k}_{\text{60 parcelas}}=180 \Leftrightarrow 60k=180 \Leftrightarrow k=3$

FIM (Caderno 2)

Cotações										
	Caderno 1 (com calculadora)									
Questões	1.1.	1.2.	1.3.	2.1.	2.2.	3.	4.			
Pontos	10	10	10	10	10	10	20	Total		80
	Caderno 2 (sem calculadora)									
Questões	5.1.	5.2.	6.	7.	8.	9.1.	9.2.	10.1.	10.2.	
Pontos	16	16	18	10	15	15	10	12	8	Total 120
Total										200