Novo Espaço – Matemática A 11.º ano

Proposta de Teste [março - 2018]

Nome: ____

Ano / Turma: __________ **N.º:** _____ **Data:** ___ / ____ / ___

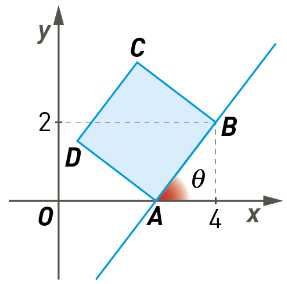
- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1. Na figura está representado um quadrado [*ABCD*].

Sabe-se que:

- a área do quadrado [*ABCD*] é 6,25 ;
- θ é a inclinação da reta *AB*;
- o ponto *A* pertence ao eixo *Ox* e *B* tem coordenadas $(4, 2)$.



1.1. A amplitude, em graus, arredondada às centésimas do ângulo θ é:

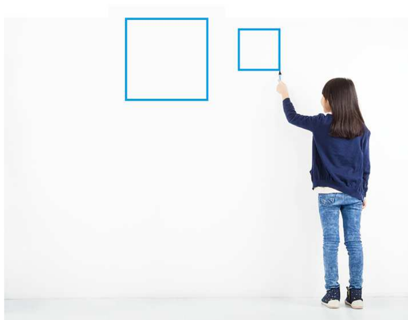
(A) 53,13 **(B)** 36,87 **(C)** 38,66 **(D)** 51,27

1.2. Mostra que uma equação da reta *AB* é $y=\frac{4}{3}x-\frac{10}{3}$.

1.3. Atendendo ao resultado apresentado em **1.2.**, determina as coordenadas do ponto de interseção da reta *BC* com o eixo *Oy*.

2. A Marta construiu uma sequência de 8 quadrados em que as medidas dos lados são os oito primeiros termos de uma progressão geométrica (u_n) de razão $\frac{1}{2}$.

Sabe-se que a área do primeiro quadrado da sequência é 1024.



2.1. A área do último quadrado da sequência é:

(A) 8 **(B)** 0,25

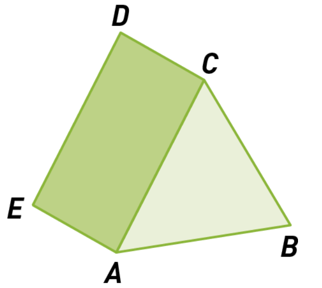
(C) 0,0625 **(D)** 4

2.2. Mostra que o termo geral de (u_n) é $u_n = 2^{6-n}$ e calcula a soma dos 12 primeiros termos da sucessão. Apresenta o resultado arredondado às centésimas.

3. Considera a sucessão (u_n) em que o termo geral é $u_n = \dfrac{1-3n}{n+1}$.

Determina o número de termos da sucessão que não pertencem a $V_{0,0015}(-3)$ (vizinhança de -3 e raio $0{,}0015$).

4. Na figura está representado um prisma triangular regular.
Em relação ao referencial o.n. *Oxyz*, sabe-se que:



- a base [*ABC*] está contida no plano *α* definido pela equação: $4x+2y-\sqrt{10}\,z-8=0$;
- os vértices *A* e *B* são as interseções do plano *α*, respetivamente, com o eixo *Ox* e o eixo *Oy*;
- o vértice *D* tem coordenadas $\left(-1,\ 1,\ 2\sqrt{10}\right)$.

Determina o volume do prisma.

Na tua resolução deves apresentar as seguintes etapas, com a determinação do valor:

- exato da área da base do prisma;

- exato da altura do prisma;

- arredondado às centésimas do volume do prisma.

FIM (Caderno 1)

Cotações								Total
Questões - Caderno 1	**1.1.**	**1.2.**	**1.3.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.**	
Pontos	10	10	10	10	10	10	20	**80**

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora gráfica)

5. Em relação a um referencial o.n. *Oxyz*, considera:

- a superfície esférica, de centro *C* e raio *r*, definida por: $(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=10$
- a reta *s* definida pela equação vetorial $(x,y,z)=(-3,-4,0)+k(1,2,1)$, $k\in\mathbb{R}$

5.1. Verifica se o ponto *C*, centro da superfície esférica, pertence à reta *s*.

5.2. A superfície esférica interseta o eixo *Oz* num ponto *A* de cota positiva.

Seja α o plano que passa em *A* e é perpendicular à reta *s*.

Determina, na forma reduzida, uma equação do plano α.

6. Seja (u_n) uma progressão aritmética em que o sétimo termo é do dobro do quinto e a soma destes dois termos é 8.

Determina o termo geral da sucessão (u_n).

7. Seja (u_n) uma sucessão real de termos negativos tal que $\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n}>1$.

Podes concluir que:

(A) A sucessão (u_n) é uma progressão geométrica.

(B) A sucessão (u_n) é limitada.

(C) A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética.

(D) A sucessão (u_n) é monótona decrescente.

8. A sucessão (u_n) é definida por recorrência da seguinte forma:

$$\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = 5 + u_n \quad , \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Calcula, caso exista, $\lim\left(\frac{1}{n^2} \times S_n\right)$, sendo S_n a soma dos n primeiros termos da sucessão (u_n).

9. Considera as sucessões (v_n) e (w_n) tais que:

$$v_n = \frac{2}{n+5} \quad \text{e} \quad w_n = \frac{5^{n+1} - 3^n}{1 + 5^n}$$

9.1. Calcula, caso exista, $\lim(w_n)$.

9.2. Se $t_n = \begin{cases} w_n & se \ n \leq 50 \\ v_n & se \ n > 50 \end{cases}$, então o $\lim(t_n)$ é:

(A) 50 **(B)** $+\infty$ **(C)** 0 **(D)** $-\infty$

10. Seja k um número real e (u_n) a sucessão definida por recorrência do seguinte modo:

$$\begin{cases} u_1 = k \\ u_{n+1} = -k + 2u_n \quad , \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

10.1. Mostra, por indução matemática, que $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = k$.

10.2. Sabe-se que $\sum_{i=26}^{85} u_i = 180$. Determina o valor de k.

FIM (Caderno 2)

Cotações										
	Caderno 1 (com calculadora)									
Questões	**1.1.**	**1.2.**	**1.3.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.**			
Pontos	10	10	10	10	10	10	20		**Total**	**80**
	Caderno 2 (sem calculadora)									
Questões	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	**10.1.**	**10.2.**	
Pontos	16	16	18	10	15	15	10	12	8	**Total** **120**
Total										**200**

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr
(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)*

Áreas de figuras planas

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$
(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(*r – raio da base; g – geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$
(*r – raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (*r – raio*)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$