Proposta de Teste [maio 2017]

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

1.ª Parte

Para cada questão indica a opção que consideras correta.

1. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$.
Sabe-se que:

- $g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, 1\right] \cup \left]3, +\infty\right[$
- $f(x) = -x^2 + 2x - 3$

O conjunto-solução da inequação $\dfrac{g(x)}{f(x)} \geq 0$ é:

(A) $\left[1, 3\right[$ **(B)** $\left]-\infty, 1\right] \cup \left]3, +\infty\right[$

(C) $\left]1, 3\right]$ **(D)** $\left]-\infty, 1\right[\cup \left]3, +\infty\right[$

2. Sejam f e g, funções reais de variável real, tais que:

- f tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ e é definida por $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$;
- $g(x) = 2 - f(x+3)$

Seja P o ponto de interseção das assíntotas do gráfico de g. As coordenadas do ponto P são:

(A) $(2, 1)$ **(B)** $(-1, 3)$

(C) $(5, 1)$ **(D)** $(-1, 1)$

3. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^-$.

Sabe-se que a reta de equação $y = -3x + 1$ é assíntota oblíqua do gráfico de f.

Então, pode-se concluir que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x) - 3}{x}$ é igual a:

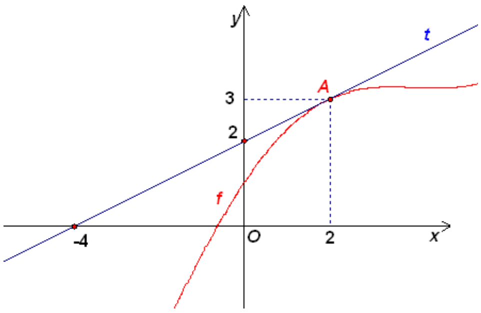
(A) $-\infty$ **(B)** -3

(C) 0 **(D)** 1

4. Na figura estão representadas uma reta t e parte do gráfico de uma função f.

Sabe-se que:

- a reta t é tangente ao gráfico de f no ponto $A(2, 3)$;
- a reta t interseta o eixo Ox no ponto de coordenadas $(-4, 0)$;
- a reta t interseta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 2)$.



Pode concluir-se que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h)-3}{h}$ é igual a:

(A) 2 **(B)** 1

(C) $\dfrac{1}{2}$ **(D)** -2

5. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por uma expressão do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Sabe-se que:

- $x_1 < x_2$
- $f(x_1) = f(x_2)$

Em relação a $f'\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)$ pode concluir-se que:

(A) Não existe. **(B)** É igual a 1.

(C) É igual a $\dfrac{1}{2}$. **(D)** É igual a 0.

2.ª Parte

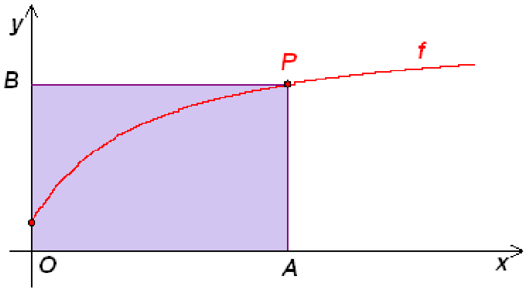
Dá respostas completas apresentando todos os cálculos e justificações necessárias.

1. Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}_0^+$, definida por:

$$f(x) = \frac{4x+1}{x+2}$$

1.1. O gráfico de f admite uma única assíntota.
Determina a equação dessa assíntota.

1.2. Na figura está representada a função f.



Sabe-se que:

- o ponto P pertence ao gráfico de f e tem abcissa positiva;
- o ponto A é a projeção ortogonal de P sobre Ox;
- o ponto B é a projeção ortogonal de P sobre Oy.

Determina:

a) a área do retângulo $[OAPB]$, se a ordenada do ponto P for $\frac{7}{2}$;

b) a abcissa do ponto P, para que $[OAPB]$ seja um quadrado.

2. Considera a função g definida por:

$$g(x) = 5x - \frac{2x}{x+1}$$

2.1. Resolve a inequação $g(x) \geq 0$. Apresenta a solução na forma de intervalo de números reais ou reunião de intervalos de números reais.

2.2. O gráfico de g admite uma assíntota oblíqua. Determina, na forma reduzida, uma equação dessa assíntota.

2.3. Há um ponto do gráfico de g, de abcissa não nula, em que a reta tangente ao gráfico nesse ponto é paralela à reta r definida pela equação vetorial
$(x, y) = (-1, 2) + k(1, 3),\ k \in \mathbb{R}$.

Determina as coordenadas desse ponto, começando por mostrar que

$\forall x \in D_g,\ g'(x) = 5 - \frac{2}{(x+1)^2}$

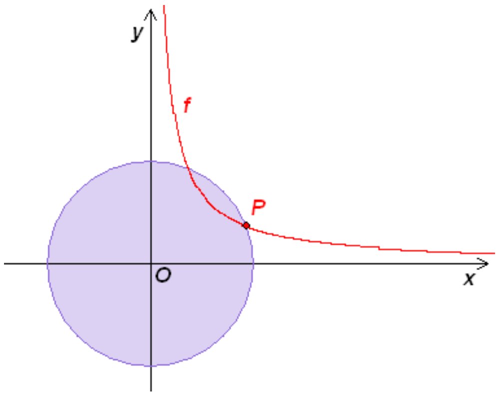
3. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-3x+\dfrac{3}{4} & \text{se } x\leq 1 \\ \dfrac{1-\sqrt{x}}{x^2-1} & \text{se } x>1 \end{cases}$$

3.1. Verifica se a função f é contínua em $x=1$.

3.2. Determina, na forma reduzida, uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0 .

4. Na figura estão representados um círculo e o gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=\dfrac{1}{x}$.



Seja g a função que a cada valor de $x>0$ faz corresponder a área do círculo de centro O e raio $\overline{OP}$, sendo P um ponto móvel do gráfico de f.

4.1. Mostra que $g(x)=\pi\times\left(\dfrac{x^4+1}{x^2}\right)$.

4.2. Considera o círculo em que a medida da área é 8 . A circunferência que delimita esse círculo interseta o gráfico de f em dois pontos A e B, sendo a abcissa de A menor que a abcissa de B. Recorre às capacidades gráficas da calculadora e determina as abcissas dos pontos A e B. Apresenta os resultados arredondados às centésimas.

FIM