CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1. Seja $\left\|\overrightarrow{CA}\right\| = a$.

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AM} = -72,25 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{CA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AM}\right\| \times \cos\left(120^\circ\right) = -72,25$

$\Leftrightarrow a \times \frac{a}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -72,25 \Leftrightarrow a^2 = 289$

Como $a > 0$, tem-se: $a = \sqrt{289} = 17$

O perímetro do triângulo [ABC] é igual a $3 \times 17 = 51$.

Resposta: Opção **(A)** 51

2. No espaço, em relação a um referencial ortonormado *Oxyz*, sabe-se que o plano α definido pela equação $x - 2y + z - 3 = 0$ é tangente a uma esfera de centro $C(-1,\ 0,\ 1)$.

Seja r a reta perpendicular a α que passa em $C(-1,0,1)$.

Uma equação vetorial da reta r: $(x, y, z) = (-1,0,1) + k(1,-2,1)$, $k \in \mathbb{R}$

O ponto de interseção da reta r com o plano α é do tipo $(-1+k, -2k, 1+k)$, $k \in \mathbb{R}$.

O ponto pertence ao plano α.

$-1 + k + 4k + 1 + k - 3 = 0 \Leftrightarrow 6k = 3 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$

Seja T o ponto de interseção da reta r com o plano α.

$T\left(-1+\frac{1}{2}, -1, 1+\frac{1}{2}\right)$, ou seja, $T\left(-\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2}\right)$

O raio da esfera é igual a $\overline{CT} = \sqrt{\left(-1+\frac{1}{2}\right)^2 + (0+1)^2 + \left(1-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Seja V o volume da esfera.

$V = \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3$, ou seja, $V \approx 7,695$

Resposta: O volume da esfera, arredondado às centésimas, é 7,70.

3.

3.1. $\beta: \ x+\frac{4}{5}y+2z+d=0 \ , \ d\in\mathbb{R}$

O ponto T pertence ao plano β, então $-1+0+6+d=0$, ou seja, $d=-5$.

$\beta: \ x+\frac{4}{5}y+2z-5=0$

Resposta: O plano β é definido pela equação $x+\frac{4}{5}y+2z-5=0$.

3.2.

Coordenadas do vértice A: $(x,0,0)$ tal que $x+0+0-4=0$, ou seja, $x=4$. Assim, $A(4,0,0)$.

Coordenadas do vértice B: $(0,y,0)$ tal que $0+\frac{4}{5}y+0-4=0$, ou seja, $y=5$. Assim, $B(0,5,0)$.

Coordenadas do vértice C: $(0,0,z)$ tal que $0+0+2z-4=0$, ou seja, $z=2$. Assim, $C(0,0,2)$.

$\overrightarrow{CA}=A-C=(4,0,-2)$

$\overrightarrow{CB}=B-C=(0,5,-2)$

Seja θ a amplitude do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CA}\|\|\overrightarrow{CB}\|}=\frac{0+0+4}{\sqrt{16+0+4}\sqrt{0+25+4}}=\frac{4}{\sqrt{580}}.$$

$\theta=\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{580}}\right)$. Recorrendo à calculadora, obtém-se: $\theta\approx 80,4^{\circ}$

Resposta: A amplitude do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ é $80,4^{\circ}$.

4.

4.1. Sabe-se que $u_{15}=65533$.

Como $u_{15}=3+2u_{14}$, tem-se:

$65533=3+2u_{14}\Leftrightarrow u_{14}=32765$

Resposta: Opção (**B**) 32765.

4.2. Sabe-se que a diferença entre dois termos consecutivos é igual a 2048.

$$u_{n+1} - u_n = 2048$$

$$u_{n+1} - u_n = 2048 \Leftrightarrow 3 + 2u_n - u_n = 2048 \Leftrightarrow u_n = 2045$$

Sendo $u_n = 2045$, então $u_{n+1} = 3 + 2 \times 2045 = 4093$.

Assim, a soma desses dois termos consecutivos é dada por $2045 + 4093$, ou seja, 6138.

Resposta: A soma dos dois termos consecutivos é 6138.

FIM (Caderno 1)

Cotações							Total
Questões - Caderno 1	**1.**	**2.**	**3.1**	**3.2**	**4.1**	**4.2**	
Pontos	10	15	15	20	10	10	**80**

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora gráfica)

5. Seja P o ponto da reta r de abcissa -3 .

Determina, na forma reduzida, a equação da reta s que é perpendicular à reta r no ponto P.

$P(-3, y)$

$(-3, y) = (-2, 3) + k(1, -4)$, $k \in \mathbb{R}$

Daqui resulta:

$$\begin{cases} -3 = -2 + k \\ y = 3 - 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ y = 7 \end{cases}$$

O ponto P tem coordenadas $(-3, 7)$.

Um vetor diretor da reta r é, por exemplo, $\vec{r}(1, -4)$.

Declive da reta r: $m_r = \frac{-4}{1} = -4$

Declive da resta s: $m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}$

Equação reduzida da reta s: $y = \frac{1}{4}x + b$, $b \in \mathbb{R}$.

A reta s passa pelo ponto $P(-3, 7)$. Então, $7 = \frac{-3}{4} + b$. Daqui resulta que $b = \frac{31}{4}$.

Equação reduzida da reta s: $y = \frac{1}{4}x + \frac{31}{4}$

Resposta: $y = \frac{1}{4}x + \frac{31}{4}$

6. O declive da reta *r* é igual a $\tan\left(180^\circ-\theta\right)$, ou seja, $-\tan\left(\theta\right)$.

$\cos^2\left(\theta\right)=1-\sin^2\left(\theta\right)=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$

Como $0^\circ<\theta<90^\circ$ e $\cos^2\left(\theta\right)=\frac{7}{16}$, tem-se $\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

O declive da reta *r* é dado por $-\tan\left(\theta\right)=-\frac{\sin\left(\theta\right)}{\cos\left(\theta\right)}=-\frac{3}{4}\times\frac{4}{\sqrt{7}}=-\frac{3\sqrt{7}}{7}$.

Resposta: Opção **(D)** $-\frac{3\sqrt{7}}{7}$

7. Equação da circunferência: $x^2+2x+y^2-4y=5$

$x^2+2x+y^2-4y=5\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2-4y+4=5+1+4\Leftrightarrow\left(x+1\right)^2+\left(y-2\right)^2=10$

Centro da circunferência $C\left(-1\,,2\right)$.

A reta *t* é o conjunto de pontos $P\left(x,y\right)$ tais que: $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AP}=0$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AP}=0\Leftrightarrow\left(3\,,1\right).\left(x-2\,,\,y-3\right)=0\Leftrightarrow 3x-6+y-3=0\Leftrightarrow y=-3x+9$

Resposta: A equação da reta *t* é $y=-3x+9$.

8. O ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é obtuso se e só se $\vec{u}.\vec{v}<0$.

$\vec{u}.\vec{v}<0\Leftrightarrow\left(1,k,k+1\right).\left(2k,0,k\right)<0\Leftrightarrow 2k+k^2+k<0\Leftrightarrow k^2+3k<0$

Cálculo auxiliar:

$k^2+3k=0\Leftrightarrow k\left(k+3\right)=0\Leftrightarrow k=0\vee k=-3$

Assim, $k^2+3k<0\Leftrightarrow k\in\left]-3,0\right[$.

Resposta: Opção **(A)** $\left]-3,0\right[$

9.

9.1.

Seja M o ponto médio [*AB*].

$$M\left(\frac{0+1}{2},\frac{2-2}{2},\frac{-3+2}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)$$

O plano mediador de [*AB*] é o conjunto dos pontos $P(x,y,z)$, tais que:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MP}=0$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MP}=0\Leftrightarrow(1,-4,5).\left(x-\frac{1}{2},y,z+\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{1}{2}-4y+5z+\frac{5}{2}=0\Leftrightarrow x-4y+5z+2=0$$

Resposta: O plano mediador de [*AB*] é $x-4y+5z+2=0$.

9.2. Qualquer ponto da reta *r* é do tipo $(1+3k,-2-k,-1+2k)$, $k\in\mathbb{R}$.

Pretende-se o ponto da reta *r* que também pertence ao plano α .

$$-2(1+3k)-2-k+3(-1+2k)-2=0\Leftrightarrow-2-6k-2-k-3+6k-2=0\Leftrightarrow k=-9$$

$$T(1-27,-2+9,-1-18)=(-26,7,-19)$$

Resposta: O ponto *T* tem coordenadas $(-26,7,-19)$.

9.3. Para que o plano α seja tangente à superfície esférica no ponto *B* é necessário que:

$B\in\alpha$ e $\overrightarrow{AB}$ seja normal ao plano α .

$\overrightarrow{AB}$ é normal ao plano α , se e só se, $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{u}_\alpha$ são colineares, sendo $\vec{u}_\alpha=(-2,1,3)$.

$\exists k\in\mathbb{R}:\ \overrightarrow{AB}=k\vec{u}_\alpha$?

$$(1,-4,5)=k(-2,1,3),\ k\in\mathbb{R}$$

Daqui resulta que:

$$\begin{cases} -2k=1 \\ k=-4 \\ 3k=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-\dfrac{1}{2} \\ k=-4 \\ k=\dfrac{5}{3} \end{cases}$$. Sistema impossível.

Conclui-se que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{u}_\alpha$ não são colineares.

Assim, o plano α não pode ser tangente à superfície esférica no ponto *B*.

Resposta: O plano α não é tangente à superfície esférica no ponto *B*.

10.

10.1.

a) " 0 (zero) não é minorante do conjunto dos termos da sucessão."

O primeiro termo da sucessão é negativo, pois $u_1=-\frac{1}{2}$, donde se conclui que 0 não é minorante do conjunto dos termos da sucessão.

b) " 2 é majorante do conjunto dos termos da sucessão".

Repara que:

$$\begin{array}{r|l} 2n-3 & n+1 \\ \cline{2-2} -2n-2 & 2 \\ \hline -5 & \end{array}$$

$\dfrac{2n-3}{n+1}=2-\dfrac{5}{n+1}$, em que $\forall n\in\mathbb{N},\ \dfrac{5}{n+1}>0$

Então, $\forall n\in\mathbb{N},\ \dfrac{2n-3}{n+1}<2$. Conclui-se que 2 é majorante do conjunto dos termos da sucessão.

10.2. $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2(n+1)-3}{n+2}-\dfrac{2n-3}{n+1}=\dfrac{(2n-1)(n+1)-(2n-3)(n+2)}{(n+2)(n+1)}=\dfrac{5}{(n+2)(n+1)}$

$\forall n\in\mathbb{N},\ \dfrac{5}{(n+2)(n+1)}>0$

$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n>0$. A sucessão (u_n) é estritamente crescente.

Sendo crescente, tem-se $\forall n\in\mathbb{N},\ u_1\le u_n$.

Assim, $u_1=-\dfrac{1}{2}$ é minorante do conjunto dos termos da sucessão.

Sendo 2 é majorante e $-\dfrac{1}{2}$ minorante, conclui-se que a sucessão (u_n) é limitada.

FIM (Caderno 2)

Cotações											
	Caderno 1 (com calculadora)										
Questões	**1.**	**2.**		**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**				
Pontos	10	15		15	20	10	10	**Total**			**80**
	Caderno 2 (sem calculadora)										
Questões	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	**9.3.**	**10.1.a)**	**10.1.b)**	**10.2.**	
Pontos	15	10	15	10	10	15	10	10	10	15	**Total** **120**
Total											**200**