Novo Espaço – Matemática A 11.º ano

Proposta de Teste [janeiro - 2018]

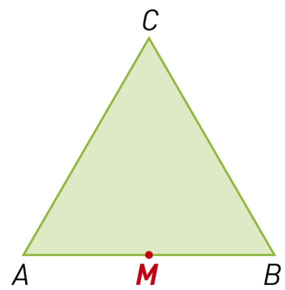
Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ / ____ / ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1. Na figura está representado um triângulo equilátero [*ABC*], sendo *M* o ponto médio de [*AB*].



Sabe-se que $\overrightarrow{CA} . \overrightarrow{AM} = -72{,}25$.

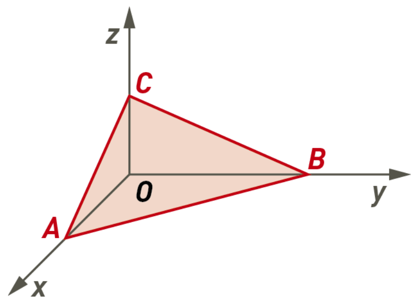
O perímetro do triângulo [*ABC*] é igual a:

(A) 51 **(B)** 39 **(C)** 289 **(D)** 25,5

2. No espaço, em relação a um referencial ortonormado *Oxyz*, sabe-se que o plano α definido pela equação $x-2y+z-3=0$ é tangente a uma esfera de centro $C(-1, 0, 1)$.

Determina o volume da esfera. Apresenta o resultado arredondado às centésimas.

3. Na figura está representado, em referencial ortonormado *Oxyz*, o triângulo [*ABC*].



Os vértices *A*, *B* e *C* são a interseção do plano α definido pela equação $x+\frac{4}{5}y+2z-4=0$, respetivamente, com os eixos *Ox*, *Oy* e *Oz*.

3.1. Escreve uma equação do plano β que passa no ponto $T(-1, 0, 3)$ e é paralelo ao plano α .

3.2. Determina a amplitude do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$. Apresenta o resultado em graus arredondado às décimas.

4. Seja (u_n) a sucessão definida por:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 3 + 2u_n \, , \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

4.1. Sabe-se que $u_{15} = 65\,533$.

Podes concluir que u_{14} é igual a:

(A) 131 069 **(B)** $32\,765$ **(C)** 131 060 **(D)** $32\,768$

4.2. Sabe-se que a diferença entre dois termos consecutivos é igual a 2048 .

Determina a soma desses dois termos.

FIM (Caderno 1)

Cotações							Total
Questões - Caderno 1	**1.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	
Pontos	10	15	15	20	10	10	**80**

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora gráfica)

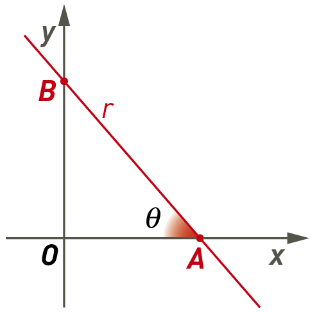
5. Em relação a um referencial ortonormado *xOy* considera a reta *r* definida pela equação vetorial $(x,y)=(-2,3)+k(1,-4)$, $k\in\mathbb{R}$.

Seja *P* o ponto da reta *r* de abcissa -3 .

Determina, na forma reduzida, a equação da reta *s* que é perpendicular à reta *r* no ponto *P*.

6. Na figura, em referencial ortonormado *xOy*, está representada uma reta *r* que interseta o eixo *Ox* no ponto *A* e o eixo *Oy* no ponto *B*.
Sabe-se que:

- $B\hat{A}O=\theta \quad (0^\circ<\theta<90^\circ)$
- $\sin\theta=\frac{3}{4}$



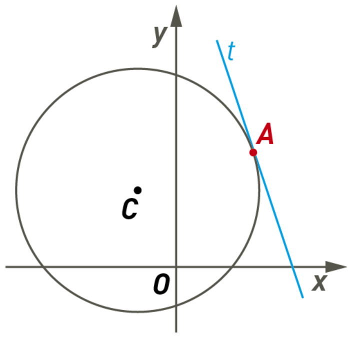
O declive da reta *r* é igual a:

(A) $\frac{3}{4}$ **(B)** $-\frac{\sqrt{7}}{3}$ **(C)** $-1,13$ **(D)** $-\frac{3\sqrt{7}}{7}$

7. Na figura, em referencial ortonormado *xOy*, estão representadas uma circunferência de centro *C* e que passa em *A* e uma reta *t* tangente à circunferência no ponto *A*.

Sabe-se que:

- as coordenadas de *A* são $(2,\,3)$;
- a circunferência é definida pela equação $x^2+2x+y^2-4y=5$;



Determina uma equação, na forma reduzida, da reta *t*.

8. Em relação a um referencial *Oxyz*, considera os vetores $\vec{u}(1,k,k+1)$ e $\vec{v}(2k,0,k)$, com $k\in\mathbb{R}$.

Os valores de k para os quais o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é obtuso são:

(A) $]-3,0[$ **(B)** $]-\infty,0[$ **(C)** $]-\infty,3[$ **(D)** $\left]0,\frac{1}{3}\right[$

9. No espaço, em relação a um referencial ortonormado *Oxyz*, considera:

- o plano α definido pela equação $-2x+y+3z-2=0$;
- a reta *r* definida por $(x,y,z)=(1,-2,-1)+k(3,-1,2)\ ,\ k\in\mathbb{R}$;
- os pontos $A(0,2,-3)$ e $B(1,-2,2)$.

9.1. Determina, na forma $ax+by+cz+d=0$, uma equação do plano mediador de [*AB*].

9.2. A reta *r* interseta o plano α num ponto *T*. Determina as coordenadas do ponto *T*.

9.3. O plano α é tangente à superfície esférica de diâmetro [*AB*], no ponto *B*? Justifica.

10. Considera a sucessão (u_n) de termo geral $u_n=\dfrac{2n-3}{n+1}$.

10.1. Justifica as seguintes afirmações:

a) “ 0 (zero) não é minorante do conjunto dos termos da sucessão.”

b) “ 2 é majorante do conjunto dos termos da sucessão”.

10.2. Mostra que a sucessão é monótona e limitada.

FIM (Caderno 2)

<table>
<tr><th colspan="13">Cotações</th></tr>
<tr><td></td><th colspan="6">Caderno 1 (com calculadora)</th><td colspan="6"></td></tr>
<tr><th>Questões</th><th>1.</th><th>2.</th><th>3.1.</th><th>3.2.</th><th>4.1.</th><th>4.2.</th><td colspan="6"></td></tr>
<tr><th>Pontos</th><td>10</td><td>15</td><td>15</td><td>20</td><td>10</td><td>10</td><th colspan="5">Total</th><th>80</th></tr>
<tr><td></td><th colspan="10">Caderno 2 (sem calculadora)</th><td colspan="2"></td></tr>
<tr><th>Questões</th><th>5.</th><th>6.</th><th>7.</th><th>8.</th><th>9.1.</th><th>9.2.</th><th>9.3.</th><th>10.1.a)</th><th>10.1.b)</th><th>10.2.</th><td colspan="2"></td></tr>
<tr><th>Pontos</th><td>15</td><td>10</td><td>15</td><td>10</td><td>10</td><td>15</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>15</td><th>Total</th><th>120</th></tr>
<tr><th colspan="12">Total</th><th>200</th></tr>
</table>

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr
(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;*
r – raio)

Áreas de figuras planas

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$

(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(*r – raio da base; g – geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$
(*r – raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (*r – raio*)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$