CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1. No intervalo $\left[-\frac{\pi}{6}, 2\pi\right]$ a equação $\cos x = k$ tem três soluções se $k > \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

Com $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}8660254$, conclui-se que o valor de k deve ser 0,87.

Resposta: A opção correta é a **(C) 0,87** .

2.

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin(\pi + x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin x - 2\sin x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{3}$$

No intervalo $]-\pi, 0[$ uma das soluções é $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$ e a outra é $-\pi - \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Recorrendo à calculadora tem-se:

$$\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) \approx -0{,}340 \quad \text{e} \quad -\pi - \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) \approx -2{,}802$$

Resposta: –0,340 e –2,802

3. A amplitude do ângulo orientado, em radianos, com lado origem o semieixo positivo Ox e lado extremidade a semirreta $\dot{O}B$ é igual a $\arctan(-2{,}7) + \pi$.

A abcissa do ponto B é igual a $\cos\left(\arctan(-2{,}7) + \pi\right)$.

Recorrendo à calculadora, tem-se:
$\cos\left(\arctan(-2{,}7) + \pi\right) \approx -0{,}35$

Resposta: A opção correta é a **(A) –0,35** .

4.

4.1. A inclinação da reta BC é $\pi - \alpha$ e o declive da reta BC é $-\frac{1}{2}$.

Então, $\tan(\pi - \alpha) = -\frac{1}{2}$. Daqui resulta que $\tan(-\alpha) = -\frac{1}{2}$, ou seja, $\tan\alpha = \frac{1}{2}$.

Resposta: $\frac{1}{2}$

4.2. A reta BC é definida pela equação $y=-\frac{x}{2}+3$.

Se $x=0$, tem-se $y=3$. Daqui resulta que $C(0,3)$.

Se $y=0$, tem-se $x=6$. Daqui resulta que $B(6,0)$.

$\overrightarrow{BA}=B-A=(8,0)$ e $\overrightarrow{BC}=C-B=(-6,3)$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\cos\alpha$ **(1)**

Sabe-se que $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ e que $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$. Daqui resulta que $\cos^2\alpha=\frac{4}{5}$.

Como α é um ângulo agudo, tem-se $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Substituindo em **(1)** $\left\|\overrightarrow{BA}\right\|=8$; $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$ e $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, tem-se:

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\cos\alpha=8\times3\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=48$

Resposta: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=48$

FIM (Caderno 1)

Cotações						Total
Questões - Caderno 1	**1.**	**2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	
Pontos	15	18	15	12	20	**80**

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora)

5.

5.1. $f\left(x\right)=\sin\left(2x\right)+\sin x$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$

A medida do lado do quadrado $\sqrt{3}$, conclui-se que a área é 3.

Resposta: A opção correta é a **(B)** **3** .

5.2. Zeros da função *f*.

$f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\sin\left(2x\right)+\sin x=0\Leftrightarrow\sin\left(2x\right)=-\sin x$

$\Leftrightarrow\sin\left(2x\right)=\sin\left(-x\right)\Leftrightarrow 2x=-x+2k\pi\ \vee\ 2x=\pi+x+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

$3x=2k\pi\ \vee\ x=\pi+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{2k\pi}{3}\ \vee\ x=\pi+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

As soluções pertencentes ao intervalo $\left[0, 2\pi\right]$ são: 0 ; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; π e 2π .

Resposta: Os zeros de *f* são: 0 ; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; π e 2π .

6. $\exists x\in\left]0,\frac{\pi}{3}\right[: \sin\left(2x\right)<0$

Se $x\in\left]0,\frac{\pi}{3}\right[$, então $0<2x<\frac{2\pi}{3}$. O seno é positivo no 1.º e 2.º quadrantes.

Assim, tem-se: $\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{3}\right[, \sin\left(2x\right)>0$

A opção falsa é a (C).

Resposta: A opção falsa é **(C)** $\exists x\in\left]0,\frac{\pi}{3}\right[: \sin\left(2x\right)<0$

7.

7.1. $\overline{BC}-\overline{AD}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1-\cos\alpha=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{1}{2}$

Como α é um ângulo agudo conclui-se que $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

7.2. $\overline{OD}=\sin\alpha=\frac{3}{4}$; $\overline{OC}=\tan\alpha$

Como $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ e $\sin\alpha=\frac{3}{4}$, resulta que $\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

Conclui-se que $\overline{OC} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$.

Resposta: $\overline{OC} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

7.3. Área do trapézio: $\frac{\overline{BC}+\overline{AD}}{2}\times\overline{CD} = \frac{1+\cos\alpha}{2}\times(\tan\alpha-\sin\alpha) = \frac{1+\cos\alpha}{2}\times\frac{\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} =$

$$= \frac{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{(1-\cos^2\alpha)\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{\sin^2\alpha\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{\sin^3\alpha}{2\cos\alpha}$$

Resposta: A área do trapézio é dada por $\frac{\sin^3\alpha}{2\cos\alpha}$.

8.

8.1. Retas paralelas têm o mesmo declive. A reta *AD* é do tipo $y = \frac{4}{3}x + b$ e passa no ponto $A(-5,0)$.

$0 = -\frac{20}{3} + b$, ou seja, $b = \frac{20}{3}$.

Equação, na forma reduzida, da reta *AD*: $y = \frac{4}{3}x + \frac{20}{3}$

Resposta: $y = \frac{4}{3}x + \frac{20}{3}$

8.2. Seja θ a amplitude do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{AO}$ e $\overrightarrow{AD}$.

Como θ é a inclinação da reta *AD*, tem-se que $\tan\theta = \frac{4}{3}$.

Mas, $1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$, então $\frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{25}{9}$. Daqui resulta que $\cos\theta = \frac{3}{5}$.

Assim, tem-se $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AO}\|\|\overrightarrow{AD}\|\cos\theta = 5\times5\times\frac{3}{5} = 15$.

Resposta: A opção correta é a **(C)** **15** .

FIM (Caderno 2)

Cotações										
	Caderno 1 (com calculadora)									
Questões	1.	2.		3.	4.1.	4.2.				
Pontos	15	18		15	12	20			Total	80
	Caderno 2 (sem calculadora)									
Questões	5.1.	5.2.	6.	7.1.	7.2.	7.3.	8.1.	8.2.		
Pontos	15	20	15	10	15	15	15	15	Total	120
Total										200