CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica.)

1.1 Se $\theta = \frac{\pi}{4}$, então $\overline{AP} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

O triângulo $[ABP]$ é um triângulo equilátero de lado 1.

Seja h a altura do triângulo.

$h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \Leftrightarrow h^2 = \frac{3}{4}$, pelo que $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Assim, a medida da área do triângulo é dada por: $\frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Resposta: $\frac{\sqrt{3}}{4}$ u.a.

1.2 Se o perímetro é 38, então $\overline{AP} = \tan(\theta) = \frac{38}{3}$.

$\arctan\left(\frac{38}{3}\right) \approx 1,49$

Resposta: **(C)** $1,49$

1.3. Se $\theta = \frac{\pi}{3}$, então $\overline{AP} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

Seja h a altura do triângulo.

$h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 = \frac{9}{4}$, pelo que $h = \frac{3}{2}$.

Assim, a abcissa de B é dada por $1 + \frac{3}{2}$, ou seja, é igual a $\frac{5}{2}$.

Resposta: **(A)** $\frac{5}{2}$

1.4. $\overline{AP} = \tan(\theta)$

Seja h a altura do triângulo.

$$h^2 + \left(\frac{\tan(\theta)}{2}\right)^2 = \tan^2(\theta) \Leftrightarrow h^2 = \frac{3}{4}\tan^2(\theta)$$

Daqui resulta que $h = \frac{3}{2}\tan(\theta)$.

A área do triângulo é dada pela expressão $\dfrac{\tan(\theta)\times\frac{3}{2}\tan(\theta)}{2}$, ou seja, $\frac{3}{4}\tan^2(\theta)$.

Assim, $f(\theta) = \frac{3}{4}\tan^2(\theta)$.

A abcissa de S é a solução da equação $f(x) = 2$.

Recorrendo à calculadora gráfica e resolvendo a equação graficamente, obtém-se, para abcissa do ponto S, arredondado às milésimas, 1,021.

2. $2 - \sin x = \sqrt{7} \Leftrightarrow \sin x = 2 - \sqrt{7}$

Repara que:

. $2 - \sqrt{7} \approx -0{,}646$

. $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -0{,}5$; $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0{,}707$ e $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} = -0{,}5$

A equação dada, no intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, 2\pi\right]$, tem três soluções e, nos restantes, tem duas.

Resposta: **(C)** $\left[-\frac{\pi}{4}, 2\pi\right]$

FIM (Caderno 1)

CADERNO 2

(Não é permitido o uso de calculadora.)

3. $\arctan\left(\sqrt{3}\right)-\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$

Resposta: **(D)** $-\frac{\pi}{3}$

4. $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin\left(3x\right)=\frac{3}{4}$

Se $\frac{\pi}{3}$ for solução da equação, então $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\pi\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-0=\frac{3}{4}$.

Conclui-se que $\frac{\pi}{3}$ é solução da equação.

Resposta: **(B)** $\frac{\pi}{3}$

5. $f\left(x\right)=0 \wedge x\in \left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan\left(x\right)\sin\left(x\right)+\sqrt{3}\sin\left(x\right)=0 \wedge x\in \left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\left(x\right)\left(\tan\left(x\right)+\sqrt{3}\right)=0 \wedge x\in \left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\sin\left(x\right)=0 \vee \tan\left(x\right)=-\sqrt{3}\right) \wedge x\in \left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x=k\pi \vee x=\frac{2\pi}{3}+k\pi \text{ , } k\in\mathbb{Z}\right) \wedge x\in \left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=-\frac{\pi}{3} \vee x=\frac{2\pi}{3}$

Resposta: $\left\{-\frac{\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3}\right\}$

6.1. $f(x)=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 1-3\cos(2x)=\frac{5}{2} \Leftrightarrow \cos(2x)=-\frac{1}{2}$

$\cos(2x)=-\frac{1}{2} \wedge x\in[0,\ 2\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(2x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \vee 2x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right) \wedge x\in[0,\ 2\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x=\frac{\pi}{3}+k\pi \vee x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right) \wedge x\in[0,\ 2\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3} \vee x=\frac{2\pi}{3} \vee x=\frac{4\pi}{3} \vee x=\frac{5\pi}{3}$

Assim, tem-se: $A\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ e $C\left(\frac{5\pi}{3},0\right)$.

$\overline{AC}=\left|\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{3}\right|=\frac{4\pi}{3}$, como queríamos demonstrar.

6.2. Área do triângulo [*ABC*] é dada por: $\frac{\overline{AC}\times|f(\pi)|}{2}$.

$\frac{\overline{AC}\times|f(\pi)|}{2}=\frac{\frac{4\pi}{3}\times|-2|}{2}=\frac{4\pi}{3}$

Resposta: $\frac{4\pi}{3}$

7.1. Sabe-se que $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ e $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$.

$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\frac{5}{9}} \Leftrightarrow \tan^2\alpha=\frac{4}{5} \Leftrightarrow \tan\alpha=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

Como o ponto *P* pertence ao 2.º quadrante, conclui-se que $\tan\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

A ordenada do ponto *B* é $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Resposta: $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

7.2. As coordenadas do ponto P são: $\left(\cos\alpha, \sin\alpha\right)$.

$d = \overline{PA} = \sqrt{\left(\cos\alpha - 1\right)^2 + \left(\sin\alpha - 0\right)^2}$

$d = \sqrt{\cos^2\alpha - 2\cos\alpha + 1 + \sin^2\alpha}$

$d = \sqrt{1 + 1 - 2\cos\alpha} = \sqrt{2 - 2\cos\alpha}$

Assim, conclui-se que $d = f\left(\alpha\right)$.

FIM (Caderno 2)